

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta059

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine numărul complex z pentru care $z - 3 + 4i = 0$.
- (4p) b) Să se calculeze conjugatul numărului complex $3 - 4i$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos 2\pi + \cos \pi$.
- (4p) d) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu lungimea laturii egală cu 3 .
- (2p) e) Să se calculeze distanța de la punctul $N(3,0)$ la punctul $P(2,1)$.
- (2p) f) Să se calculeze aria triunghiului MNP , unde $M(1,0), N(3,0), P(2,1)$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se determine numărul real $x > 0$ pentru care $3 - \log_3 x = 0$.
- (3p) b) Să se calculeze câte submulțimi are mulțimea $A = \{a, b, c\}$.
- (3p) c) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^4 - X + 1$ la polinomul $g = X - 1$.
- (3p) d) Să se calculeze $C_5^4 + C_5^3$.

- (3p) e) Să se calculeze $1 + 2 + \dots + 20$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) d) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \cdot f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / a \in \mathbf{R}^* \right\}$.

- (4p) a) Să se arate că $I_2 \in G$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $A \in G$, atunci $\det A \neq 0$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
- (2p) d) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sunt două elemente din G , să se determine matricea $C = A \cdot B - B \cdot A$.
- (2p) e) Dacă $A \in G$, să se determine A^2 și A^3 .
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 1-a^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$, $x, y, z \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(x) - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze primii doi termeni ai sirului $(a_n)_{n \geq 1}$.
- (4p) c) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se arate că $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$.

Varianta 059

SUBIECTUL I

a) $3 - 4i$.

b) $3 + 4i$

c) 0.

d) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

e) $\sqrt{2}$

f) 1

SUBIECTUL II

1.

a) 27.

b) 8.

c) 1.

d) 15.

e) 210.

2.

a) 0.

b) $e^x(2x + x^2)$.

c) $3e$.

d) $x_0 = -2$ este punct de maxim local, iar $x_1 = 0$ este punct de minim local.

e) $e^2 - e$.

SUBIECTUL III

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad (a=1);$

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}^*$; $\det A = a \neq 0$.

c) Fie $A = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}^*, B = \begin{pmatrix} y & 1-y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbf{R}^*$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 1-y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 1-xy \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

d) $C = \begin{pmatrix} ab & 1-ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ba & 1-ba \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2;$

e) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & 1-a^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

f) Pentru $n = 1$ se verifică ușor. Din **e)**, avem $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci verificarea este

făcută și pentru $n = 2$. Presupunem $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 1-a^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbf{N}^*$ și demonstrăm că

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 1-a^{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbf{N}^*. A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} a^k & 1-a^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^{k+1} & 1-a^{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall k \in \mathbf{N}^*. \text{Atunci } A^n = \begin{pmatrix} a^n & 1-a^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

g) Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\text{Det } A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$;

sistemul este compatibil unic determinat. Se rezolvă cu regula lui Cramer.

$$S = \{(2,1,0)\}.$$

SUBIECTUL IV

a) $f(x) - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = 0$.

b) $a_1 = f(1) = \frac{3}{4}; a_2 = f(1) + f(2) = \frac{8}{9}$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Atunci $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

d) $a_n < a_{n+1}$ devine

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) < f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + f(n+1).$$

Obținem $f(n+1) > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Dar $f(n+1) = \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)} > 0 \forall n \in \mathbf{N}^*$

e) Din **a)**, avem $f(x) - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = 0, x \in (0, \infty)$, adică $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

$$a_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \\ 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} + 1 \right) = 1$.