

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta055

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului (AB) , dacă $A(1,3)$ și $B(-5,-5)$.
- (4p) b) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului (AB) .
- (4p) c) Să se arate că expresia $E = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$ nu depinde de x .
- (4p) d) Să se calculeze $\cos x$, dacă $\sin x = \frac{3}{5}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
- (2p) e) Să se calculeze aria unui dreptunghi având lungimea de 6 și lățimea egală cu $\frac{2}{3}$ din lungime.
- (2p) f) Să se calculeze conjugatul numărului complex $z = (1+i)(2-2i)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se verifice dacă punctul $A(0,5)$ este situat pe graficul funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 5$.
- (3p) b) Să se calculeze $C_{11}^3 - C_{11}^8$.
- (3p) c) Să se rezolve în \mathbf{R} , ecuația $3^{x^2} = 81$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $\log_2(x-1) = 1$, $x > 1$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea $\{10, 11, 12, 13\}$ să fie par.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se arate că $f(x)$ este crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^2 + 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 3x^2 dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$

- (4p) a) Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- (4p) c) Să se calculeze determinantul matricei $A(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $A(x) \cdot A(-x) = I_2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că mulțimea G , împreună cu operația de înmulțire a matricelor, formează o structură de grup comutativ.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $(A(1))^n = A(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se determine $t \in \mathbf{R}$ pentru care $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(27) = A(t)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x)$ este descrescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.
- (2p) d) Să se arate că $-1 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se determine ecuația asymptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot f(x)$.
- (2p) g) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.

Varianta 55

SUBIECTUL I

- a) $AB = 10$.
- b) Punctul C este mijlocul (AB) $\Rightarrow C(-2, -1)$.
- c) Efectuând calculele obținem $E=2$.
- d) $\cos x = -\frac{4}{5}$.
- e) $S = 24$.
- f) $\bar{z} = 4$.

SUBIECTUL II

1.

a) $A(0,5) \in G_f \Leftrightarrow f(0) = 5(A)$.

b) $C_{11}^3 - C_{11}^8 = 0$.

c) $x = \pm 2$.

d) $x = 3$.

e) $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2.

a) $f'(x) = 2x$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$.

c) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$.

e) $\int_1^2 3x^2 dx = 7$.

SUBIECTUL III

a) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 1 \end{pmatrix} = A(x+y), \forall x, y \in \mathbf{R}$.

b) $I_2 = A(0) \in G \Rightarrow I_2 \in G$.

c) $\det(A(x)) = 1$.

d) Folosind a) avem că $A(x) \cdot A(-x) = A(0) = I_2$.

e) Folosind a), b), d) se verifică axiomele grupului.

f) Notăm $P(n): (A(1))^n = A(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(1): A(1) = A(1), \text{ (A).}$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): (A(1))^k = A(k), \text{ iar } P(k+1): (A(1))^{k+1} = A((k+1)).$$

$$\text{Dar } (A(1))^{k+1} = (A(1))^k \cdot A(1) \stackrel{P(k)}{=} A(k) \cdot A(1) \stackrel{a)}{=} A((k+1)).$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

g) $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(27) \stackrel{f)}{=} A(1)(A(1))^2 \cdot \dots \cdot (A(1))^{27} = (A(1))^{1+2+\dots+27} = A(378),$
de unde $t = 378$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

c) Deoarece $f'(x) < 0, \forall x > 1 \Rightarrow$ funcția f este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$.

d) $-1 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq (x+1)^2 \\ 0 \leq (x-1)^2 \end{cases}$ Relații care sunt adevărate $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow$ y=0 este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2.$

g) $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 1.$