EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D/F

Varianta ….**054**

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze aria unui triunghi având lungimile laturilor egale cu 3, 4 şi 5

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2)$ la punctul $C(0,1)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin x$, ştiind că $tgx = 1$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(5,2)$, $M(6,3)$ şi $N(7,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze aria unui pătrat cu perimetrul 28.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^4 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze $C_6^0 - C_6^1 + C_6^5 - C_6^6$.

(3p) **b)** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația $\log_4 x = -3$.

(3p) **c)** Să se determine probabilitatea ca alegând un element din mulțimea $\{10, 11, \ldots, 35\}$ să fie divizibil cu 5.

(3p) **d)** Să se afle câtul şi restul împărțirii polinomului $f = X^6 - 2X^3 + 1$ la polinomul $g = X^2 + X + 1$.

(3p) **e)** Să se rezolve, în **R**, ecuația $8^x - 16 = 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin^2 x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $f(z)=4z-3\overline{z}$, pentru numărul compex $z=a+ib$, $a,b\in$ **R ,** am notat prin $\overline{z}=a-ib$.

(4p) **a)** Să se arate că $\overline{\overline{z}}=z$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

(4p) **b)** Să se arate că $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ şi $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$, $\forall z,w\in\mathbf{C}$.

(4p) **c)** Să se arate că $z\in\mathbf{R}$ dacă şi numai dacă $z=\overline{z}$.

(2p) **d)** Să se calculeze $f(i)+f(1)$.

(2p) **e)** Să se verifice că $\overline{f(z)}=4\overline{z}-3z$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

(2p) **f)** Să se arate că, $(f\circ f)(z)=\frac{7^2+1}{2}z-\frac{7^2-1}{2}\overline{z}$, $\forall z\in\mathbf{C}$.

(2p) **g)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că, $\forall n\in\mathbf{N}^*$ şi $\forall z\in\mathbf{C}$**,** avem

$$\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori\ f}(z)=\frac{7^n+1}{2}z-\frac{7^n-1}{2}\overline{z}.$$

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f(e)$ şi $f'(e)$.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0,e]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[e,\infty)$.

(2p) **d)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(2p) **g)** Să se determine $x,y\in(0,\infty)$ astfel încât $f(x)+f(y)=\frac{2}{e^3}$.

Varianta 054

Subiectul I

a) Evident tringhiul este dreptunghic şi aria este $\frac{3\cdot 4}{2}=6$.

b) $DC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

c) Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ si $tgx=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Am $\begin{vmatrix}5 & 2 & 1\\ 6 & 3 & 1\\ 7 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$ L, M, N coliniare.

e) Evident latura este 7 si aria 49.

f) $\left(\sqrt{3}+i\right)^4=a+bi\Leftrightarrow\left(3-1+2\sqrt{3}i\right)^2=a+bi\Leftrightarrow\left(2+2\sqrt{3}i\right)^2=a+bi\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4-12+8\sqrt{3}i=a+bi\Leftrightarrow a=-8$ si $b=8\sqrt{3}$.

Subiectul II

1.

a) $C_6^0-C_6^1+C_6^5-C_6^6=C_6^0-C_6^1+C_6^1-C_6^0=0$

b) $\log_4 x=-3\Leftrightarrow\log_4 x=\log_4 4^{-3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{64}>0$ convine ;

c) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{13}$;

d) $x^6-2x^3+1=\left(x^3-1\right)^2=\left[(x-1)\left(x^2+x+1\right)\right]^2$, deci catul este x^4-x^3-x+1, iar restul este 0 ;

e) $8^x-16=0\Leftrightarrow 2^{3x}=2^4\Leftrightarrow 3x=4\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

2.

a) $f'(x)=2\sin x\cos x\ (\forall)x\in\mathbf{R}$

b) $\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=\sin^2 1$

c) Deoarece $\sin x,\cos x\geq 0(\forall)x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow f'(x)=2\sin x\cos x\geq 0,$

$(\forall)x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow f$ crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

d) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1$.

Subiectul III

a) $\overline{\overline{z}} = \overline{(a-bi)} = a+bi = z$.

b) Fie $z = a+bi, w = c+di$. Am $\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} =$

$= (a+c)-(b+d)i = a-bi+c-di = \overline{z}+\overline{w}$

$\overline{z \cdot w} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c) Fie $z = a+bi$, $a,b \in \mathbf{R}$. Am $z = \overline{z} \Leftrightarrow a+bi = a-bi \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = a \in \mathbf{R}$

d) $f(i)+f(1) = 4i+3i+4-3 = 1+7i$

e) $\overline{f(z)} = \overline{(4z-3\overline{z})} = 4\overline{z}-3z$

f) $(f \circ f)(z) = f(f(z)) = 4f(z)-3\overline{f(z)} = 4(4z-3\overline{z})-3(4\overline{z}-3z) =$

$= 16z-12\overline{z}-12\overline{z}+9z = 25z-24\overline{z} = \frac{7^2+1}{2}z - \frac{7^2+1}{2}\overline{z}$

g) Pentru $n=1$ se verifică, iar pentru $n=2$ vezi f). Presupun

$(\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{\text{de n ori}})(z) = \frac{7^n+1}{2}z - \frac{7^n+1}{2}\overline{z}$ si am $(\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{\text{de n+1 ori}})(z) =$

$f\left((\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{\text{de n ori}})(z)\right) = 4(\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{\text{de n ori}})(z) - 3\overline{(\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{\text{de n ori}})(z)} =$

$4\frac{7^n+1}{2}z - 4\frac{7^n-1}{2}\overline{z} - 3\frac{7^n+1}{2}\overline{z} + 3\frac{7^n-1}{2}z = \frac{7^{n+1}+1}{2}z - \frac{7^{n+1}-1}{2}\overline{z}$ şi conform principiului inducției matematice, propoziția e demonstrată pentru orice $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = 3\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = 3\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \frac{1-\ln x}{x^2}$

b) $f(e) = \frac{1}{e^3}$; $f'(e) = 0$.

c) Folosim a) şi b) şi vedem că $f'(x) > 0 (\forall) x \in (0,e)$ si $f'(x) < 0\ (\forall) \in (e,+\infty)$, adica f e strict crescătoare pe $(0,e]$ si strict descrescătoare pe $[e,+\infty)$

d) f este continuă pe $(0,\infty)$ şi aici nu am asimptotă verticală şi cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ asimptotă verticală pentru f.

e) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^e (\ln^2 x)' dx = \frac{1}{2}(\ln^2 e - \ln^2 1) = \frac{1}{2}$.

f) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\right)^3 = 0^3 = 0$.

g) Din c) şi b) am văzut că $f(x) \le f(e) (\forall)\, x \in (0,\infty)$ cu egalitate pentru $x = e$, adică $f(x) \le \frac{1}{e^3} (\forall) x \in (0,\infty)$ cu egalitate pentru $x = e$. Deci

$f(x) + f(y) = \frac{2}{e^3} \Leftrightarrow x = y = e$.