

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
***Varianta ....053***

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**NOTĂ.**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine partea reală a numărului complex  $z = (1+i)(1-2i)$  .
- (4p) b) Să se calculeze  $\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$  .
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  în care  $AB = 5$ ,  $AC = 5$  și  $m(A\hat{B}C) = 45^\circ$  .
- (4p) d) Să se calculeze distanța de la punctul  $A(2,-3)$  la dreapta de ecuație  $y = 2$  .
- (2p) e) Să se dea un exemplu de număr real  $x$  pentru care  $1 + \cos x = 0$  .
- (2p) f) Să se determine numărul întreg  $a$ , astfel încât punctul  $P(a,0)$  să fie situat pe dreapta de ecuație  $3x - y - 3 = 0$  .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

**1.**

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x = 16^{20}$  .
- (3p) b) Să se calculeze determinantul matricei  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  .
- (3p) c) Să se determine numărul real  $t > 0$  pentru care  $2 + \log_3 t = 0$  .
- (3p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f = X^4 + X^3 - 2X - 2$  la polinomul  $g = X + 1$  .
- (3p) e) Să se calculeze  $2 + 12 + 22 + \dots + 102$  .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x \cdot (x^2 - 1)$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  .
- (3p) b) Să se determine coordonatele punctelor de extrem local ale funcției  $f$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n)$
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$  .

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $G = \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} / f(x) = ax + b, a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0\}$  și se notează cu  $\mathbf{1}_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  funcția definită prin  $\mathbf{1}_{\mathbf{R}}(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$ .

- (4p) a) Să se determine funcția  $f \in G$  pentru care  $f(2) = 5$  și  $f(3) = 8$ .
- (4p) b) Să se arate că  $\mathbf{1}_{\mathbf{R}} \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că dacă  $f, g \in G$ , atunci  $f \circ g \in G$ .
- (2p) d) Să se arate că pentru orice  $f \in G$  sunt adevărate egalitățile  $f \circ \mathbf{1}_{\mathbf{R}} = \mathbf{1}_{\mathbf{R}} \circ f = f$ .
- (2p) e) Să se arate că pentru orice  $f \in G$  există  $g \in G$ , astfel încât  $f \circ g = g \circ f = \mathbf{1}_{\mathbf{R}}$ .
- (2p) f) Să se determine două funcții  $f, g \in G$  pentru care  $f \circ g \neq g \circ f$ .
- (2p) g) Să se arate că  $(G, \circ)$  formează o structură de grup necomutativ.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \ln x$

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Să se rezolve ecuația  $f'(x) = 0$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ .
- (2p) d) Să se determine care număr este mai mare  $a = f\left(\frac{1}{e}\right)$  sau  $b = f\left(\frac{2}{e}\right)$ .
- (2p) e) Să se arate că  $1 + e \cdot x \cdot \ln x \geq 0$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .
- (2p) g) Să se arate că pentru orice primitivă  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  a funcției  $f$ , avem  $F(2007) > F(2006)$

### Varianta 053

#### SUBIECTUL I

- a) 3.
- b) 0
- c)  $\frac{25}{2}$ .
- d) 5.
- e)  $\pi$ .
- f)  $a = 1$ .

#### SUBIECTUL II

- 1.
- a) 80.
- b) 8.
- c)  $\frac{1}{9}$ .
- d) 0.
- e) 572.
- 2.

- a)  $f'(x) = 3x^2 - 1$ .
- b)  $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$  punct de maxim local.  
 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$  punct de minim local.
- c) 0.
- d) 1.
- e)  $-\frac{1}{4}$ .

#### SUBIECTUL III

- a)  $f(2) = 2a + b = 5$   
 $f(3) = 3a + b = 8$ .  
 $a = 3$ ; si  $b = -1$ .
  - b)  $1_R(x) = 1 \cdot x + 0 \in G$ .
  - c)  $f \in G$ ; atunci  $f = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ .  
 $g \in G$ ; atunci  $g = cx + d$ ,  $c, d \in \mathbf{R}$ ,  $c \neq 0$ .  
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = acx + ad + b$ .
- Cum  $a, c \neq 0$  rezultă  $ac \neq 0$  iar  $ad + b \in \mathbf{R}$ . Atunci  $f \circ g \in G$ .

**d)**  $(f \circ 1_R)(x) = f(1_R(x)) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$ . Deci  $f \circ 1_R = f$   
 $(1_R \circ f)(x) = 1_R(f(x)) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$ .

Deci  $f \circ 1_R = 1_R \circ f = f$ .

**e)** Fie  $f = ax + b, a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$ .

$$g = cx + d, c, d \in \mathbf{R}, c \neq 0$$

Cum  $f \circ g = 1_R$  avem  $(f \circ g)(x) = x$ , sau  $acx + ad + b = x$  sau  
 $x(ac - 1) = -(ad + b), \forall x \in \mathbf{R}$ .

Atunci  $ac - 1 = 0$  si  $ad + b = 0$ . Obținem  $c = \frac{1}{a} \neq 0$  si  $d = -\frac{b}{a}$

Deci există  $g \in G$  astfel incat  $f \circ g = g \circ f = 1_R, g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ .

**f)**  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1; g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 3x + 1; f, g \in G$  iar  $f \circ g \neq g \circ f$

**g)** Din **c)**, dacă  $f, g \in G$  atunci  $f \circ g \in G$ .

Asociativitatea:

Fie  $f, g, h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0, a, b \in \mathbf{R}$ .

$$g(x) = cx + d, c \neq 0, c, d \in \mathbf{R}, h(x) = px + q, p \neq 0, p, q \in \mathbf{R}$$

$$[(f \circ g) \circ h](x) = acpx + acq + ad + b.$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = acpx + acq + ad + b.$$

Am obținut  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h), \forall f, g, h \in G$

Elementul neutru este  $1_R$  (rezultă din **d**))

Elementul simetrizabil.

Din **e** , rezultă că  $\forall f \in G$ , există  $g \in G$  astfel incat  $f \circ g = g \circ f = 1_R, g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ .

Din **f** , există  $f, g \in G$  astfel incat  $f \circ g \neq g \circ f$ . Deci “ $\circ$ ” nu este comutativă.

Am obținut astfel ca  $(G, \circ)$  formează o structură de grup necomutativ.

## SUBIECTUL IV

**a)**  $f'(x) = \ln x + 1$

**b)** Din  $f'(x) = 0, x \in (0, \infty)$  avem  $\ln x + 1 = 0$  sau  $x = e^{-1}, x = \frac{1}{e} \in (0, \infty)$ .

**c)**

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		Min	

Obținem că  $f$  este strict crescătoare pe  $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ .

**d)** Din **c)**,  $f$  este strict crescătoare pe  $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$  atunci  $f\left(\frac{1}{e}\right) < f\left(\frac{2}{e}\right)$  adică  $a < b$ .

**e)** Din **c)**, obținem că  $x_0 = \frac{1}{e}$  este punct de minim local, adică  $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right), \forall x \in (0, \infty)$

Obținem  $1 + e \cdot x \ln x \geq 0, \forall x \in (0, \infty)$ .

$$\textbf{f)} \int_1^e f(x) dx = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

**g)** Din **c)**, avem că  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ .

Avem  $f(2006) < f(2007)$ , sau  $F(2006) < F(2007)$ .