

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta052

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.



La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex $7 + 3i$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1, 2)$ la punctul $C(0, 1)$.
- (4p) c) Să se calculeze coordonatele punctului de intersecție dintre dreapta de ecuație $2x + 3y = 25$ și dreapta de ecuație $x + y - 1 = 0$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(5, 2)$, $M(6, 3)$ și $N(7, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele $C(0, 1)$ și $D(1, 2)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\sqrt{3} + i)^2 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se verifice identitatea $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se arate că, dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$, unde $x, y, z \in \mathbf{R}$, atunci $x = y = z$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$.
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element $x \in \{1, 2, 3\}$ să verifice relația $x^3 < 5x$.
- (3p) e) Să se calculeze suma coeficienților polinomului $f = X^4 + X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $[0, 1]$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$, se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze AB și BA .
- (4p) b) Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a AB și BA este aceeași.
- (4p) c) Să se calculeze matricele $A + B$ și $A - B$.
- (2p) d) Să se arate că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B))$.
- (2p) e) Să se demonstreze că $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice , să se arate că $\det(A_1 A_2 \dots A_n) = \det(A_1)\det(A_2) \dots \det(A_n)$, $\forall A_1, \dots, A_n \in M_2(\mathbf{C})$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că $\det(A^n) = \det^n(A)$, $\forall A \in M_2(\mathbf{C})$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ și

$$F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (4p) b) Să se verifice că $(x-1)f(x) = x^5 - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) f) Să se rezolve ecuația $F(x) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{5}$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se arate că $F(x) < xf(x)$, $\forall x > 0$.

Varianta 052

Subiectul I

a) Daca $z = 7 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 7 - 3i$

b) $CD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

c) Rezolvând sistemul obținem $\begin{cases} x = -22 \\ y = 23 \end{cases}$

d) Am $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ deci L, M, N coliniare.

e) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$

f) $(\sqrt{3} + i)^2 = a + bi \Leftrightarrow (3 - 1 + 2\sqrt{3}i) = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases}$

Subiectul II

1. a) Eliminând parantezele se obține egalitatea

b) Folosind a) obțin $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

c) Notând $a = 2^x, b = 3^x, c = 5^x$ și aplicând b) obțin $2^x = 3^x = 5^x \Leftrightarrow x = 0$

d) Relația e verificată de 1 și 2, deci probabilitatea este $\frac{2}{3}$

e) $f(1) = 2$.

2. a) $f'(x) = \sin x + x \cos x, (\forall)x \in \mathbf{R}$

b) $\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = \sin 1$

c) Deoarece $\sin x \geq 0, \cos x > 0, (\forall)x \in [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, folosind a) obțin $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,1]$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Subiectul III

a) $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$

b) Evident $ae + bg + cf + dh = ea + fc + gh + hd$

c) $A+B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}; \quad A-B = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$

d) $\det(A+B) + \det(A-B) = (a+e)(d+h) - (b+f)(c+g) + (a-e)(d-h) - (b-f)(c-g) = 2(ad-bc+eh-fg) = 2(\det A + \det B)$

e) $\det AB = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg)$, iar
 $\det A \cdot \det B = (ad-bc)(eh-fg)$ și se verifică prin calcul direct egalitatea.

f) pentru $n = 2$, aplicând e) am $\det(A_1 \cdot A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2$

Presupun $\det(A_1 A_2 \dots A_n) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_n$ și am

$$\det(A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}) = \det((A_1 A_2 \dots A_n) \cdot A_{n+1}) = \det(A_1 A_2 \dots A_n) \cdot \det A_{n+1} = \\ = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_n \cdot \det A_{n+1} \text{ și conform principiului inducției matematice propoziția este adevărată pentru } (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

g) Aplicând f) cu $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ obținem $\det A^n = \det \left(\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ ori}} \right) = \underbrace{\det A \cdot \det A \cdot \dots \cdot \det A}_{n \text{ ori}} = (\det A)^n$

Subiectul IV

a) $f(1) = 5$

b) $(x-1)f(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1, (\forall) x \in \mathbf{R}$

c) $f(1) = 5 > 0$

$$(\forall) x > 1 \quad f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1} > 0$$

$$(\forall) x < 1 \quad f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1} > 0$$

Deci $f(x) > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$

d) F este o primitivă pe \mathbf{R} a lui f adică $F'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$

$$\text{Altfel } F(x) = \int_0^x f(t) dt = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

$$F'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$$

e) Folosind d) și c) am $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F$ este strict crescătoare pe \mathbf{R}

f) $F(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ se verifica pentru $x = 1$ și cum F este strict crescătoare $\Rightarrow F$ este injectivă;

deci $x=1$ este soluție unică

g) Fie $x > 0$

$$F(x) < x \cdot f(x) \Leftrightarrow F(x) - x \cdot f(x) < 0$$

$$\text{Notez } h(x) = F(x) - x \cdot f(x) \Rightarrow h'(x) = F'(x) - f(x) - x \cdot f'(x) = -x \cdot f'(x)$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 2(6x^2 + 3x + 1) > 0, (\forall) x > 0 \Rightarrow f'$$
 strict crescătoare și cum

$$f'(0) = 1 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Deci $h'(x) = -x \cdot f'(x) < 0, (\forall) x > 0 \Rightarrow h$ este strict descrescătoare și cum $h(0) = 0 \Rightarrow h(x) < 0, (\forall) x > 0$
adică $F(x) < x \cdot f(x), (\forall) x > 0$.