

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta051

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(1,1)$ și $B(3,3)$.
- (4p) b) Să se calculeze diagonala unui pătrat de latură 2.
- (4p) c) Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.
- (4p) d) Să se calculeze $m \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele $x + y - 4 = 0$ și $mx + 2y - 7 = 0$ să fie paralele.
- (2p) e) Se consideră triunghiul ABC cu $A(1,1)$, $B(3,3)$ și $C(3,1)$. Să se calculeze lungimea medianei corespunzătoare laturii AB .
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC avem $AB = 2\sqrt{2}$, $AC = 2$ și $\hat{m(ACB)} = 90^\circ$ să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze câte submulțimi de 2 elemente numere prime are mulțimea $\{2,3,4,5\}$.
 - (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{2,3,4,5\}$ să verifice relația $n! < 3n + 1$.
 - (3p) c) Să se calculeze suma soluțiilor ecuației $x^2 - 1 = 0$.
 - (3p) d) Să se calculeze suma $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$.
 - (3p) e) Să se calculeze produsul primelor 5 zecimale ale numărului $\sqrt{50}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 5$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 - (3p) b) Să se afle $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
 - (3p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
 - (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$.
 - (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 051

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea de polinoame $G = \left\{ f_n \mid f_n = (X^2 + X + 1)^{4n+1} - X, n \in \mathbf{N} \right\}$ și

$$g \in \mathbf{C}[X], g = X^2 + 1.$$

- (4p) a) Să se arate că $g \in G$.
- (4p) b) Să se calculeze $f_n(-1)$.
- (4p) c) Să se calculeze rădăcinile complexe ale polinomului g .
- (2p) d) Să se arate că $f_n(i) = f_n(-i) = 0, \forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f_1 .
- (2p) f) Să se determine restul împărțirii polinomului f_n la polinomul g .
- (2p) g) Să se calculeze $f_0(1) + f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_n(1), n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f'(x) = g(x), \forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$ și strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.
- (4p) c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (2p) f) Să se determine ecuația asymptotei la graficul funcției g către $+\infty$.
- (2p) g) Să se determine $x, y \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) + f(y) = 0$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 051

Varianța 51

Subiectul I

- a) $AB = 2\sqrt{2}$.
 b) $d = 2\sqrt{2}$.
 c) M este mijlocul segmentului $(AB) \Rightarrow M(2,2)$.
 d) $m = 2$.
 e) Mijlocul segmentului (AB) este $M(2,2)$; $CM = \sqrt{2}$.
 f) $BC = 2$.

Subiectul II

1.

- a) 3 submulțimi.
 b) $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
 c) Suma soluțiilor ecuației este 0.
 d) $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 16$.
 e) produsul primelor 5 zecimale ale numărului $\sqrt{50}$ este 0.

2.

- a) $f'(x) = 3x^2 - 3$, $x \in \mathbf{R}$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -3$.
 c) $x = -1$ și $x = 1$ sunt puncte de extrem local.
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} = 1$.
 e) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{17}{4}$.

Subiectul III

- a) Pentru $n = 0$ avem $f_0 = X^2 + 1 = g \Rightarrow g \in G$.
 b) $f_n(-1) = 2$.
 c) $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm i$.
 d) $f_n(i) = (i^2 + i + 1)^{4n+1} - i = 0$, $f_n(-i) = ((-i)^2 - i + 1)^{4n+1} + i = 0$.
 e) Suma coeficienților polinomului f_1 este $f_1(1) = 242$.
 f) Din teorema împărțirii cu rest $\Rightarrow f_n = (X^2 + 1)q + aX + b$, $a, b \in \mathbf{R}$. Din b) rezultă că $ai + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

g) $f_0(1) + f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_n(1) = 3 - 1 + 3^5 - 1 + 3^9 - 1 + \dots + 3^{4n+1} - 1 =$
 $= (3 + 3^5 + 3^9 + \dots + 3^{4n+1}) - n = 3 \cdot \frac{3^{4n+4} - 1}{80} - n.$

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbf{R}.$

b) Din $f'(x) \leq 0, x \in (-\infty, 0]$ și $f'(x) \geq 0, x \in [0, \infty)$ rezultă f strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și f strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

c) Din punctul **b)** rezultă $x = 0$ punct de minim local.

Din punctul **b)** rezultă $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}.$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0.$

e) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x' \cdot \ln(x^2 + 1) dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx = \ln 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx =$
 $= \frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2.$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

g) Folosind **b)** și **c)** avem că $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ cu egalitate pentru $x = 0$, analog pentru y , deci $x = y = 0$.