

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta049

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(-3,6)$ și $B(5,2)$.
- (4p) b) Să se calculeze expresia $\cos^2 2007 + \sin^2 2007$.
- (4p) c) Să se calculeze conjugatul numărului complex $\frac{5}{2-i}$.
- (4p) d) Să se calculeze lungimea laturii unui triunghi echilateral cu aria de $10\sqrt{3}$.
- (2p) e) Să se calculeze $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(-3,6)$ și $B(5,2)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Să se calculeze aria triunghiului ABC ,dacă avem $AB = 6$, $AC = 5$ și $m(\hat{BAC}) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze câtul și restul împărțirii polinoamului $f = X^3$ la polinoamul $g = X + 1$.
- (3p) b) Să se determine numărul de funcții $f : \{a,b\} \rightarrow \{1,2,3\}$ cu proprietatea $f(a) + f(b) = 4$.
- (3p) c) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $5^x - 1 = 24$.
- (3p) d) Să se calculeze $1 + 11 + 21 + 31 + \dots + 101$.
- (3p) e) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 1$. Să se determine punctul de pe graficul funcției, care are coordonatele egale.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
- (3p) b) Să se afle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și polinomul $f = X^2 + 2X - 15$.

(4p) a) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $f(x) = 0$.

(4p) b) Să se calculeze determinantul matricei A .

(4p) c) Să se calculeze matricea A^2 .

(2p) d) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$, $x, y \in \mathbf{R}$.

(2p) e) Să se verifice egalitatea $A^2 + 2A - 15I_2 = O_2$.

(2p) f) Să se calculeze matricea $A \cdot B - B \cdot A$.

(2p) g) Să se demonstreze, folosind metoda inducției matematice, că $(A + B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$ și sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

(4p) a) Să se calculeze a_1 .

(4p) b) Să se demonstreze că $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(2p) d) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(2p) e) Să se determine ecuația asymptotei către ∞ la graficul funcției f .

(2p) f) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

(2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^3 \cdot \left(\int_1^n f(x) dx - \frac{3}{8} \right) \right]$.

Varianta 049

Subiectul I

- a) $AB = 4\sqrt{5}$.
- b) $\cos^2 2007 + \sin^2 2007 = 1$.
- c) $\bar{z} = 2 - i$.
- d) $l = 2\sqrt{10}$.
- e) $a = 2, b = -9$.
- f) $\frac{15}{2}$

Subiectul II

1.

- a) Aplicând algoritmul împărțirii polinoamelor obținem câtul $X^2 - X + 1$ și restul -1 .
- b) Avem în total 3 funcții.
- c) $x = 2$.
- d) $S_{11} = 561$.
- e) $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2.

- a) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}, \forall x \in \mathbf{R}^*$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
- c) $x = 1$ punct de minim local.
- d) Dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- e) $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^3 + 5}{3}$.

Subiectul III

- a) $x_1 = -5, x_2 = 3$.
- b) $\det(A) = -15$.
- c) $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$.
- d) $S = \{(0,0)\}$.
- e) $A^2 + 2A - 15I_2 = O_2$.

f) $A \cdot B - B \cdot A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

g) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Fie $P(n)$ propoziția $(A + B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*$.

Avem $P(1)$ este adevărată.

Presupunem adevărată propoziția pentru $n = k, P(k): (A + B)^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Vom arăta că $(A + B)^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$(A + B)^{k+1} = (A + B)^k \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci în baza inducție matematică avem că $(A + B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*$.

Subiectul IV

a) $a_1 = f(1) = \frac{7}{8}.$

b) $a_n = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

d) $f'(x) = \frac{-3x^2}{x^6} + \frac{3(x+1)^2}{(x+1)^6} = -\frac{3}{x^4} + \frac{3}{(x+1)^4}, \forall x \in (0, \infty).$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .

f) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(x^{-3} - (x+1)^{-3} \right) dx = \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right]_1^2 = \frac{11}{36}.$

g) Din punctul f) avem $\int_1^n f(x) dx = \left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right]_1^n = \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} + \frac{3}{8}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\int_1^n f(x) dx - \frac{3}{8} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \right) = -1.$$