

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta048

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,4)$ la punctul $B(5,6)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos^2 a + \sin^2 a$, $a \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{3}$.
- (4p) d) Să se calculeze conjugatul numărului complex $2 - 5i$.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(3,4)$ și $B(5,6)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC , $AB = 1, AC = 2$ și $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$, să se calculeze lungimea laturii BC .

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se calculeze câte funcții $f : \{a,b\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ au proprietatea $f(a) \neq f(b)$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n^2 \geq n!$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $4^x - 32 = 0$.
- (3p) d) Să se calculeze $5 + 15 + 25 + 35 + \dots + 95$.
- (3p) e) Dacă funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sunt $f(x) = x^{10} - 1$ și $g(x) = x^{15} + 1$, să se calculeze $(g \circ f)(0)$.
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x + x^2)$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f'(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x f'(x)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Pentru matricea $M \in M_2(\mathbf{R})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm $tr(M) = a + d$.

- (4p) a) Să se calculeze $tr(A)$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
- (4p) b) Să se arate că, dacă $B = C \in M_2(\mathbf{R})$, atunci $tr(B) = tr(C)$.
- (4p) c) Să se găsească două matrice $P, Q \in M_2(\mathbf{R})$, diferite, pentru care $tr(P) = tr(Q)$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $U, V \in M_2(\mathbf{R})$ și $tr(U) = tr(V)$ și $tr(U^2) = tr(V^2)$, atunci $det(U) = det(V)$.
- (2p) e) Să se arate că $tr(aD + bE) = a \cdot tr(D) + b \cdot tr(E)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\forall D, E \in M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) f) Să se arate că $tr(F \cdot G) = tr(G \cdot F)$, $\forall F, G \in M_2(\mathbf{R})$.
- (2p) g) Să se arate că, dacă $L, N \in M_2(\mathbf{R})$ și $tr(L \cdot X) = tr(N \cdot X)$, $\forall X \in M_2(\mathbf{R})$, atunci $L = N$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+4}{x+5}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \geq 0$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că $\frac{13}{10} \leq f(x) < 3$, $\forall x \in [0, \infty)$.
- (2p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (2p) e) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$, la graficul funcției f .
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt$.
- (2p) g) Să se rezolve, în intervalul $[0, \infty)$, ecuația $f(x) = 2$.

Varianta 048

Subiectul I

- a) $AB = 2\sqrt{2}$
- b) $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
- c) Aria cerută este $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
- d) Dacă $z = 2 - 5i$ atunci $\bar{z} = 2 + 5i$
- e) Se obține soluția $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$
- f) Cu teorema lui Pitagora $BC = \sqrt{5}$

Subiectul II

1.

- a) 6 funcții
- b) Deoarece numai 1,2, și 3 verifică inegalitatea, probabilitatea este $\frac{3}{5}$
- c) $4^2 = 32 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$
- d) Suma este $\frac{5+95}{2} \cdot 10 = 500$
- e) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^{15} + 1 = (x^{10} - 1)^{15} + 1$
 Din $(g \circ f)(0) = (-1)^{15} + 1 = 0$

2.

- a) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$, $(\forall)x > 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{3}{2}$
- c) $f'(x) > 0$, $(\forall)x > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$
- d) $\int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x}{x^2 + x} = 8$

Subiectul III

a) $tr A = 5$

b) Evident

c) Fie $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Evident $P \neq Q$ dar $trA = trB = 2$

d) Fie $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ cu $trU = trV$ și $trU^2 = trV^2 \Rightarrow a+d = m+q$ și

$$a^2 + d^2 + 2bc = m^2 + q^2 + 2np \Leftrightarrow (a+d)^2 - 2ad + 2bc = (m+q)^2 - 2mq + 2np \Leftrightarrow ad - bc = mq - np$$

adică $\det U = \det V$

e) Dacă $D = \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}$ și $E = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ atunci $(aD + bE) = \begin{pmatrix} ad + bm & ae + bn \\ af + bp & ag + bq \end{pmatrix}$ și $tr(aD + bE) = ad + bm + ag + bq$ iar $a \cdot trD + b \cdot trE + a(d+g) + b(m+q) = tr(aD + bE)$

f) Fie $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $G = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow F \cdot G = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$ cu $tr F \cdot G = ax + bz + cy + dt$ iar $G \cdot F = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ za + tc & zb + td \end{pmatrix}$ cu $tr G \cdot F = ax + cy + bz + dt$ și se vede egalitatea $tr F \cdot G = tr G \cdot F$

g) Fie $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Luăm pe rând $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și obținem $c = g$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obținem $b = f$ și $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ apoi $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pentru $a = e$ și $d = h$ adică $L = N$

Subiectul IV

a) $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{1}{x+2} + 1 - \frac{1}{x+5}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+5)^2}, (\forall)x \geq 0$

b) Din a) se vede că $f'(x) > 0 (\forall)x \geq 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare

c) Din b) $\Rightarrow f(0) \leq f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), (\forall)x \in [0, \infty)$ adică $\frac{13}{10} \leq f(x) < 3 (\forall)x \in [0, \infty)$

d) $\int_0^1 f(x)dx = (3x - \ln(x+1)(x+2)(x+5)) \Big|_0^1 = 3 - \ln 36 + \ln 10 = 3 + \ln \frac{5}{18}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ asimptotă orizontală către $+\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - \ln(x+1)(x+2)(x+5) + \ln 10) = \ln 10 + \lim_{x \rightarrow \infty} x[3 - \frac{\ln(x+1)(x+2)(x+5)}{x}] = \ln 10 + \infty = \infty$

g) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 6x + 7) = 0$ și cum $x \geq 0$ convine $x = 1$