

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta046

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine conjugatul numărului complex $z = (2+i)(1-2i)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos \frac{\pi}{3}$.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AB = 6$, $AC = 6$ și $m(A\hat{B}C) = 45^0$.
- (4p) d) Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,-4)$ la dreapta de ecuație $y = 1$.
- (2p) e) Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^8}$.
- (2p) f) Să se verifice dacă punctul $M(1,8)$ este situat pe dreapta de ecuație $2x - y + 6 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

- Se consideră mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
 - Să se determine numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii A .
 - Să se calculeze câte elemente din mulțimea A sunt soluții ale ecuației $(2^x - 2) \cdot (2^{x+1} - 1) = 0$.
 - Să se găsească un element din mulțimea A care este soluție a ecuației $\log_2 x = 0$.
 - Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element din mulțimea A să obținem o soluție a ecuației $x^2 + x - 2 = 0$.
 - Să se dea un exemplu de mulțime B cu cel puțin 4 elemente astfel încât mulțimea $A \cap B$ să aibă exact 3 elemente .
- Se consideră funcția $h : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = x + \frac{1}{x}$.
 - Să se calculeze $h'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
 - Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției h .
 - Să se rezolve inecuația $h(x) \geq 2x$, $x \in (0, \infty)$.
 - Să se determine punctele de extrem local ale funcției h .
 - Să se calculeze $\int_1^2 h(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea G a funcțiilor $f_m : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f_m(x) = mx + m - 1$, $m \in \mathbf{R}^*$ și se notează cu $\mathbf{1}_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funcția definită prin $\mathbf{1}_{\mathbf{R}}(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f_1(2)$ și $f_2(3)$.
- (4p) b) Să se arate că $\mathbf{1}_{\mathbf{R}} \in G$.
- (4p) c) Să se arate că $f_a \circ f_b = f_{a \cdot b}$, $\forall f_a, f_b \in G$.
- (2p) d) Să se arate că pentru orice $f_a \in G$ sunt adevărate egalitățile $f_a \circ \mathbf{1}_{\mathbf{R}} = \mathbf{1}_{\mathbf{R}} \circ f_a = f_a$.
- (2p) e) Să se arate că pentru orice $f_k \in G$ există $f_j \in G$, astfel încât $f_k \circ f_j = f_j \circ f_k = \mathbf{1}_{\mathbf{R}}$.
- (2p) f) Să se verifice că operația de compunere a funcțiilor determină o structură de grup pe mulțimea G .
- (2p) g) Să se arate, folosind metoda inducției matematice, că $\underbrace{f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{de\ 2007\ ori} = f_{a^{2007}}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + \ln x - x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(e) + e$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) c) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$, $x \in (0, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că f are un singur punct de extrem local.
- (2p) e) Să se determine ecuațiile asymptotelor la graficul funcției f .
- (2p) f) Să se arate că $1 + \ln x \leq x$, $\forall x \in (0, \infty)$.

- (2p) g) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx$.

Varianta 046

SUBIECTUL I

- a) $4 + 3i$.
 b) $\frac{1}{2}$.
 c) 18.
 d) 5.
 e) 1.
 f) $2 \cdot 1 - 8 + 6 = 0$.

SUBIECTUL II

1.
 a) 10.
 b) 2.
 c) $1 \in A$.
 d) $\frac{2}{5}$.
 e) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
2.
 a) $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
 b) $x=0$ este asimptotă verticală.
 c) $x \in (0, 1]$.
 d) $x_0 = -1$ este punct de maxim local , iar $x_1 = 1$ este punct minim de local .
 e) $\frac{3}{2} + \ln 2$.

SUBIECTUL III

- a) $f_1(2) = 2, f_2(3) = 7$.
 b) $1_R(x) = 1 \cdot x + 1 - 1 \in G$.
 c) $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = a(bx + b - 1) + a - 1 = abx + ab - 1 = f_{ab}(x), \forall f_a, f_b \in G$.
 d) $(f_a \circ 1_R)(x) = f_a(1_R(x)) = f_a(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

Deci $f_a \circ 1_R = f_a$.

$(1_R \circ f_a)(x) = 1_R(f_a(x)) = f_a(x), \forall x \in \mathbf{R}$. Deci $1_R \circ f_a = f_a$.

Am obținut $f_a \circ 1_R = 1_R \circ f_a = f_a$.

e) Din c) avem $f_k \circ f_j = f_{kj}$. $f_j \circ f_k = f_{jk}$.

Cum $f_{jk} = 1_R$, avem $f_{jk}(x) = jkx + jk - 1 = x$ sau $x(jk - 1) = 1 - jk$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Deci $jk - 1 = 0$. Atunci $j = \frac{1}{k} = k^{-1}$.

$f_{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}x + \frac{1}{k} - 1 \in G$. Deci există $f_j = f_{\frac{1}{k}} \in G$ astfel incat $f_k \circ f_j = f_j \circ f_k = 1_R$.

f) Din **c)** $\forall f_a, f_b \in G$ avem $f_a \circ f_b = f_{ab} \in G$.

Asociativitatea $(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_a \circ (f_b \circ f_c), \forall f_a, f_b, f_c \in G$.

Din **c)** avem $(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_{ab} \circ f_c = f_{abc}$, $f_a \circ (f_b \circ f_c) = f_a \circ f_{bc} = f_{abc}$.

Deci $(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_a \circ (f_b \circ f_c)$.

Elementul neutru.

$\exists f_e \in G$ astfel incat $f_a \circ f_e = f_e \circ f_a = f_a$. Din **d)** avem $f_e = 1_R$.

Elementul simetrizabil

$\forall f_k \in G, \exists f_j \in G$ astfel incat $f_k \circ f_j = f_j \circ f_k = 1_R$.

$f_j = f_{\frac{1}{k}}$.

Deci operația de compunere a funcțiilor determină o structură de grup pe mulțimea G .

g) Din **c)** avem $f_a \circ f_a = f_{aa} = f_{a^2}$. Presupunem $\underbrace{f_a \circ f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2007 \text{ ori}} = f_{a^{2007}}$

Demonstrăm că $\underbrace{f_a \circ f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2008 \text{ ori}} = f_{a^{2008}}$.

$\underbrace{f_a \circ f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2008 \text{ ori}} = (\underbrace{f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2007 \text{ ori}}) \circ f_a = f_{a^{2007}} \circ f_a = f_{a^{2008}} \dots$

Deci $\underbrace{f_a \circ f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2007 \text{ ori}} = f_{a^{2007}}$.

SUBIECTUL IV

a) $f(e) = 2 - e$.

b) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.

c) $f'(x) = 0, x \in (0, \infty)$ devine $\frac{1}{x} - 1 = 0$. Deci $x = 1 \in (0, \infty)$.

d)

x	0	1	∞
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		Max	

$x_0 = 1$ este punct de maxim local. Deci f are un singur punct de extrem local.

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \ln x - x) = -\infty$. Deci $x=0$ este asimptotă verticală.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \ln x - x) = -\infty$ deci functia f nu are asimptotă orizontală;

Studiem asimptota oblică

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln x - x}{x} = -1 ; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \ln x - x + x) = +\infty$$

Deci f nu admite asimptota oblică.

f) $1 + \ln x \leq x$ devine $1 + \ln x - x \leq 0$ sau $f(x) \leq 0, \forall x \in (0, \infty)$.

Dar $x_0 = 1$ este punct de maxim local. Deci $f(x) \leq 0, \forall x \in (0, \infty)$.

g) $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e (1 + \ln x - x) dx = x \Big|_{\frac{1}{e}}^e + \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx - \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{e}}^e$

Deci $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \left(e - \frac{1}{e} \right) + \frac{2}{e} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} \right) = \frac{2e^3 + 2e - e^4 + 1}{2e^2}$.