Ministerul Educației și Cercetării – Serviciul Național de Evaluare și Examinare

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D/F

***Varianta* 044**

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările
Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale
NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze conjugatul numărului complex $z = 3i$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\sin^2 \dfrac{7\pi}{12} + \cos^2 \dfrac{7\pi}{12}$.

(4p) **c)** Să se determine numărul întreg m știind că punctul $M(3,m)$ este situat pe dreapta de ecuație $y - 2x + m = 0$.

(4p) **d)** Să se calculeze distanța dintre punctele $N(2,-3)$ și $P(5,1)$

(2p) **e)** Să se calculeze volumul unui cub care are lungimea diagonalei egală cu $3\sqrt{3}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)$, folosind eventual formula $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$, adevărată pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 5x - 1$ și $g(x) = \dfrac{x+1}{5}$

(3p) **a)** Să se determine numerele întregi x, care verifică egalitatea $f(x) = x^2 + 3$.

(3p) **b)** Să se calculeze $S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(20)$.

(3p) **c)** Să se determine două numere întregi a și b pentru care $f(a) < g(b)$.

(3p) **d)** Să se determine un număr întreg k pentru care $1 < g(k) < 2$.

(3p) **e)** Să se calculeze $(g \circ f)(x) - x, \forall x \in \mathbf{R}$.

2. Se consideră funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = e^x - 1 - x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $h'(x), \quad x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției h .

(3p) **c)** Să se arate că $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x)}{x}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 h(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie "$\circ$" prin :

$x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

(4p) **a)** Să se arate că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se determine numărul real a care verifică egalitatea $a \circ x = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se determine numărul real b care verifică egalitatea $b \circ x = b$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $A = (-5) \circ (-4) \circ (-3) \circ (-2) \circ (-1)$.

(2p) **f)** Să se determine numerele reale $t > 0$ pentru care $1 + (\log_2 t) \circ (\log_3 t) = 0$.

(2p) **g)** Să se determine două numere $a, b \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbf{Z}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 4x + 1$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(x) \geq 2x \cdot (x-2)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se determine punctul de extrem local al funcţiei *f*.

(2p) **d)** Să se arate că funcţia *f* este crescătoare pe $[1, \infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că $f(x) \geq -2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$.

(2p) **g)** Să se arate că $\int_e^{e^2} \frac{x-2}{f(x)} dx \leq \frac{1}{2}$, folosind eventual **b)**.

Varianta 044

SUBIECTUL I

a) $-3i$
b) 1
c) $m = 3$.
d) 5.
e) 27.
f) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.
a) $x_1 = 1, x_2 = 4$
b) 1030.
c) $a = 0, b = 1$.
d) $k = 5$.
e) 0.
2.
a) $h'(x) = e^x - 1$.
b) $O(0,0)$ este punctul de minim local.
c) Cum $x_0 = 0$ este punct de minim local atunci $h(x) \geq h(0)$ sau $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.
d) 0.
e) $e - \dfrac{5}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3 - 1 = 3(y+1)(x+1) - 1, \forall x, y \in \mathbf{R}.$
b) $(x \circ y) \circ z = 3(3xy + 3x + 3y + 2 + 1)(z+1) - 1 = 9(xy + x + y + 1)(z+1) - 1 = 9(x+1)(y+1)(z+1) - 1.$
$x \circ (y \circ z) = 3(x+1)(3yz + 3y + 3z + 2 + 1) - 1 = 9(x+1)(yz + y + z) - 1 = 9(x+1)(y+1)(z+1) - 1.$
Deci $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
c) $a \circ x = x$ devine $3ax + 3a + 3x + 2 = x$, sau $(x+1)(3a+2) = 0, \forall x \in .\mathbf{R}.$
Atunci $a = -\dfrac{2}{3}$.
d) $b \circ x = b$ devine $3bx + 3b + 3x + 2 = b$ sau $(b+1)(3x+2) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.
Deci $b = -1$.
e) $A = -1$
f)
$1 + 3\log_2 t \cdot \log_3 t + 3\log_2 t + 3\log_3 t + 2 = 0$
$(\log_2 t + 1)(\log_3 t + 1) = 0$
$t = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \in (0, \infty)$ sau $t = 3^{-1} = \dfrac{1}{3} \in (0, \infty)$

Deci $t \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

g) $a \circ b = 3ab + 3a + 3b + 2 \in \mathbf{Z}$.

Fie $k \in \mathbf{Z}$ astfel incat $3(a+1)(b+1) - 1 = k$

$(a+1)(b+1) = \frac{k+1}{3}$.

Cum $a, b \in \mathbf{Q} \backslash \mathbf{Z}$ alegem $a = \frac{1}{2} \in \mathbf{Q} \backslash \mathbf{Z}$ iar $b = \frac{1}{3} \in \mathbf{Q} \backslash \mathbf{Z}$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 4x^3 - 4$

b) $x^4 - 4x + 1 \geq 2x^2 - 4x$ devine $x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$ sau $(x^2 - 1)^2 \geq 0$. Adevarată $\forall x \in \mathbf{R}$.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f)(x)$	$\searrow$			$\nearrow$	

Obținem $x_0 = 1$ punct de minim local.

d) $f'(x) = (x-1)(x^2 + x + 1) \geq 0, \forall x \geq 1$.

Deci *f* este crescătoare pe $[1, \infty)$.

e) Cum $x_0 = 1$ este punct de minim local ,deducem că $f(x) \geq f(1), \forall x \in \mathbf{R}$ adică $f(x) \geq -2, \forall x \in \mathbf{R}$.

f) $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{x^4 - 4x + 1}{x} dx = \int_1^e x^3 dx - \int_1^e 4dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^e - 4x\Big|_1^e + \ln|x|\Big|_1^e =$

$= \frac{1}{4}e^4 - 4e + \frac{19}{4}$.

g) $f(x) \geq 2x(x-2), \forall x \in \mathbf{R}$, atunci pentru $x > 2$ obținem $\frac{x-2}{f(x)} \leq \frac{1}{2x}$.

Atunci $\int_e^{e^2} \frac{x-2}{f(x)} dx \leq \int_e^{e^2} \frac{1}{2x} dx$.

Dar $\int_e^{e^2} \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2}$. Deci $\int_e^{e^2} \frac{x-2}{f(x)} dx \leq \frac{1}{2}$.