

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
***Varianta ....043***

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**NOTĂ.**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine numărul complex  $z$  pentru care  $z - 1 + 2i = 0$  .
- (4p) b) Să se calculeze  $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ$  .
- (4p) c) Să se determine numărul întreg  $m$  știind că punctul  $M(m,1)$  este situat pe dreapta de ecuație  $y - x = 0$  .
- (4p) d) Să se determine  $a,b \in \mathbf{R}$  astfel încât dreapta de ecuație  $x + ay = b$  să treacă prin punctele  $N(2,2)$  și  $P(3,3)$  .
- (2p) e) Să se calculeze numărul dreptelor care trec prin cel puțin două din punctele  $M(1,1), N(2,2), P(3,3), Q(0,3)$  .
- (2p) f) Să se calculeze  $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$  , folosind eventual formula  $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$  .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ,  $f(x) = 4x - 3$  .
  - (3p) a) Să se determine câte numere întregi  $x$  verifică egalitatea  $f(x) = x^2$  .
  - (3p) b) Să se calculeze  $S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(20)$  .
  - (3p) c) Să se calculeze  $(f \circ f)(1)$  .
  - (3p) d) Să se determine un număr întreg  $k$  pentru care  $f(k) > 2$  .
  - (3p) e) Să se rezolve, în  $\mathbf{R}$ , ecuația  $f(x) + 2f(1-x) = 3$  .
  
2. Se consideră funcția  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ,  $g(x) = x^3 - 3x$  .
  - (3p) a) Să se calculeze  $g'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  .
  - (3p) b) Să se determine coordonatele punctelor de extrem local ale funcției  $g$  .
  - (3p) c) Să se determine care număr este mai mare :  $a = g(\sqrt{2})$  sau  $b = g(\sqrt{3})$  .
  - (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - g(n)}{n}$  .
  - (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 g(x)dx$  .

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și polinoamele

$$f = X^2 - 10X + 16, \quad g = X^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $A^2$ .
- (4p) c) Să se arate că  $f(A) = O_2$ , unde  $f(A) = A^2 - 10 \cdot A + 16 \cdot I_2$ .
- (2p) d) Să se rezolve sistemul de ecuații :  $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}$ .
- (2p) e) Să se determine numerele reale  $t$  pentru care  $f(2^t) = 0$ .
- (2p) f) Să se determine cel mai mare număr întreg  $k$  astfel încât pentru orice număr real  $x$  să avem  $f(x) - k \geq 0$ .
- (2p) g) Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , restul împărțirii polinomului  $g$  la polinomul  $f$  este  $\frac{8^n - 2^n}{6} \cdot X + \frac{4 \cdot 2^n - 8^n}{3}$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- (4p) a) Să se rezolve ecuația  $f(x) = 0$ .
- (4p) b) Să se determine ecuația asimptotei către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (2p) d) Să se arate că  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $(0, e]$  și strict descrescătoare pe intervalul  $[e, \infty)$ .
- (2p) e) Să se arate că  $e \cdot \ln x \leq x$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx$ .
- (2p) g) Folosind eventual d), să se arate că :  $2006^{2007} > 2007^{2006}$ .

**Varianta 043**

**SUBIECTUL I**

- a)  $1 - 2i$
- b) 1
- c)  $m = 1$ .
- d)  $a = -1; b = 0$ .
- e) 4
- f)  $\frac{1}{4}$ .

**SUBIECTUL II**

- 1.
- a) 2
- b) 780.
- c) 1.
- d) 2.
- e)  $S = \{-1\}$
- 2.

- a)  $g'(x) = 3x^2 - 3$ .
- b)  $A(-1,2)$  punct de maxim local, iar  $B(1,-2)$  punct de minim local.
- c)  $b > a$ .
- d) 3.
- e)  $-\frac{5}{4}$ .

**SUBIECTUL III**

- a)  $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16$  .
- b)  $A^2 = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$
- c)  $f(A) = A^2 - 10A + 16I_2 = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$
- d)  $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$ . Sistemul este compatibil unic determinat. Rezolvăm sistemul cu regula lui Cramer.

$$S = \{(1, -1)\}$$

$$\text{e)} f(2^t) = 0 \text{ este echivalentă cu } 2^{2t} - 10 \cdot 2^t + 16 = 0 .$$

Notam  $2^t = y \in (0, \infty)$ . Obținem  $y^2 - 10y + 16 = 0$ , cu soluțiile  $y_1 = 2, y_2 = 8$ .

Atunci  $2^t = 2$ , rezulta  $t=1$ , iar din  $2^t = 8$  obținem  $t=3$ .

f) Din  $f(x)-k \geq 0$ , avem  $x^2 - 10x + 16 - k \geq 0$ .

$$\Delta = 100 - 4(16 - k) = 100 - 64 + 4k = 36 + 4k.$$

Dar  $\Delta \leq 0$ , adică  $k \in (-\infty, -9]$ .

Cum  $k \in \mathbb{Z}$ , atunci cel mai mare  $k$  este  $-9$ .

g) Din teorema impărțirii cu rest pentru polinoame avem  $X^n = (X^2 - 10X + 16)C + aX + b$

$$x^2 - 10x + 16 = 0 \text{ are rădăcinile } x_1 = 2 \text{ și } x_2 = 8.$$

Pentru  $x = 2$  obținem  $2^n = 2a + b$  iar pentru  $x = 8$  obținem  $8^n = 8a + b$ .

$$\text{Atunci } a = \frac{8^n - 2^n}{6}, b = \frac{4 \cdot 2^n - 8^n}{3}.$$

$$\text{Deci restul este } R = \frac{8^n - 2^n}{6}X + \frac{4 \cdot 2^n - 8^n}{3}.$$

#### SUBIECTUL IV

a)  $f(x) = 0$  este echivalentă cu  $\frac{\ln x}{x} = 0$ , deci  $\ln x = 0$ , adică  $x = 1 \in (0, \infty)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

Deci,  $y = 0$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$ .

c)  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

d) Din  $f'(x) = 0$ , obținem  $1 - \ln x = 0$ , adică  $x = e$ .

$x$	0		$e$		$\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			max		

Deci  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $(0, e]$  și strict descrescătoare pe intervalul  $[e, \infty)$ .

e)  $x_0 = e$  este punct de maxim local, deci  $f(x) \leq f(e)$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e}, \text{adică } e \cdot \ln x \leq x, \forall x \in (0, \infty).$$

f) Fie  $I = \int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x \cdot (\ln x)' dx = \left[ \frac{\ln^2 x}{2} \right]_{\frac{1}{e}}^e = 0$ .

g)  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $[e, \infty)$ , atunci  $\forall x > e$  avem  $f(x) < f(e)$ .

Atunci  $f(e) > f(2006) > f(2007)$  sau

$$\frac{\ln 2006}{2006} > \frac{\ln 2007}{2007}, \text{adică } \ln 2006^{2007} > \ln 2007^{2006} \text{ sau } 2006^{2007} > 2007^{2006}.$$