

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta042

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{1+i}{2+i}$.
- (4p) b) Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului CD , unde $C(7,8)$ și $D(3,2)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin(x+2\pi)$, dacă $\sin x = 0,8$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $L(1,1)$, $M(2,2)$ și $N(-3,3)$.
- (2p) e) Să se determine aria pătratului cu perimetrul 20.
- (2p) f) Să se determine perimetru unui triunghi dreptunghic isoscel cu o catetă de lungime 10.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine câtul împărțirii polinomului $f = X^3 + 1$ la polinomul $g = X^2 + X + 1$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{0,1,\dots,125\}$ să fie pătrat perfect.
- (3p) c) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 7$.Să se calculeze $(f \circ f)(10)$.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $2^{3x} = 32$.
- (3p) e) Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului $f = X^2 - 3X + 2$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2e^x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) c) Să se arate că $f(x) \geq 2$, $\forall x \geq 0$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se determine ecuația asymptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$ și matricele $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ -n & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$
 și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se arate că $I_2 \in G$ și $A_2 \in G$.
- (4p) b) Să se calculeze $\det A_n$, $n \in \mathbf{Z}$.
- (4p) c) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B = B \cdot A$.
- (2p) e) Să se arate că $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că, dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$, atunci $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$.
- (2p) g) Se consideră matricea $M = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_{2007}^2$ și se notează cu m suma elementelor matricei M . Să se arate că $m < 0$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{4x+4}{x^2(x+2)^2}$ și sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$,
 $a_n = f(1) + f(3) + \dots + f(2n-1)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+2)^2}$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (4p) c) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_n = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{n^2}$.
- (2p) g) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

Varianta 042

Subiectul I

- a) $\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{5}$.
- b) Mijlocul M al segmentului $(CD) \Rightarrow M(5,5)$.
- c) $\sin(x + 2\pi) = 0,8$.
- d) $S_{LMN} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.
- e) $S = 25$.
- f) $P = 20 + 10\sqrt{2}$.

Subiectul II

1.

- a) Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem câtul $X - 1$.
- b) $p = \frac{12}{126} = \frac{2}{21}$.
- c) $(f \circ f)(10) = 118$.
- d) $x = \frac{5}{3}$.
- e) $x_1^3 + x_2^3 = 9$.

2.

- a) $f'(x) = 2e^x$.
- b) $\int_0^1 f(x)dx = 2(e - 1)$.
- c) $x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 2$.
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2e$.
- e) $y = 0$ este asimptota oblică spre $-\infty$.

Subiectul III

- a) Pentru $a = 1; b = 0 \Rightarrow I_2 \in G$ și pentru $a = 1; b = 2 \Rightarrow A_2 \in G$.
- b) $\det A_n = 1 + n^2; n \in \mathbf{Z}$.
- c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbf{R} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in G$
deoarece $a + c \in \mathbf{R}; b + d \in \mathbf{R}$.
- d) Calcul direct.

e) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Pentru $n=1$ avem $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ adevărat.

Presupunem adevărat pentru $n=k$ deci $1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Vom demonstra că este adevărat și pentru $n=k+1$, adică

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

În baza inducției matematice rezultă $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbf{N}^*$.

f) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$

g) $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f)} A_k^2 = \begin{pmatrix} 1 - k^2 & 2k \\ -2k & 1 - k^2 \end{pmatrix}.$

Atunci $M = \sum_{k=1}^{2007} A_k^2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{2007} (1 - k^2) & 2 \sum_{k=1}^{2007} k \\ -2 \sum_{k=1}^{2007} k & \sum_{k=1}^{2007} (1 - k^2) \end{pmatrix} \stackrel{\text{not}}{=} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$

Deci $m = 2x = 2 \sum_{k=1}^{2007} (1 - k^2) < 0$.

Subiectul IV

a) $f(x) = \frac{4x+4}{x^2(x+2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+2)^2}, \forall x > 0$.

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right) = +\infty$. Deci $x=0$ este asimptota verticală la graficul funcției f .

c) $f'(x) = -\frac{2x}{x^4} + \frac{2(x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+2)^3}, \forall x > 0$.

d) Fie $P(n)$ propoziția $a_n = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Avem $P(1)$ este adevărată.

Presupunem adevărată propoziția pentru $n = k$, $P(k) : a_k = 1 - \frac{1}{(2k+1)^2}, k \in \mathbb{N}^*$.

Vom arăta că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, adică avem de arătat că $a_{k+1} = 1 - \frac{1}{(2k+3)^2}$.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= f(1) + f(2) + \dots + f(2k+1) = a_k + f(2k+1) = \\ &= 1 - \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{(2k+3)^2} = 1 - \frac{1}{(2k+3)^2}. \end{aligned}$$

Deci în baza inducție matematică avem că $a_n = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = 1 - 0 = 1.$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{(2n+1)^2} \right)^{\frac{(2n+1)^2 - 1}{(2n+1)^2} \cdot n^2} =$
 $= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(2n+1)^2}} = e^{-\frac{1}{4}}.$

g) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right) dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{(x+2)^{-1}}{-1} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$