

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta041

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 2)$, $B(3, -3)$ și $C(-9, -3)$.

- (4p) a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
- (4p) b) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se determine $\cos(\hat{BAC})$.
- (2p) e) Să se calculeze coordonatele mijlocului M al segmentului (BC) .
- (2p) f) Să se determine numerele $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele A și B să aparțină dreptei de ecuație $x + ay + b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se rezolve ecuația $C_n^1 = 2$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (3p) b) Să se rezolve ecuația $\log_3(x+1) = 2$, $x \in (-1, \infty)$.
- (3p) c) Să se calculeze coordonatele vârfului graficului funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.
- (3p) d) Să se determine câte numere de patru cifre distincte se pot forma, folosind cifrele 0, 1, 2, 3.
- (3p) e) Pe mulțimea \mathbf{Z} se consideră legea de compozиie asociativă $x \circ y = x + y - 3$.
Să se determine elementul neutru al legii.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x(2-x)$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
- (3p) c) Să se determine punctul de extrem al funcției f .
- (3p) d) Să se arate că funcția este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 1]$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot f(n) \right)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 041

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$.

Se consideră cunoscute formulele $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se arate că $f = (2X-1)(2X^2-2X+1)$.
- (4p) b) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $2X-1$.
- (4p) c) Să se determine rădăcinile complexe, care nu sunt reale, ale polinomului f .
- (2p) d) Să se calculeze $x_1 + x_2$ și x_1x_2 , unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile complexe nereale ale polinomului f .
- (2p) e) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze egalitatea $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se demonstreze egalitatea $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^4$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că $f'(x) = (2x-x^2) \cdot e^{-x}$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (2p) d) Să se determine ecuația asymptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- (2p) f) Utilizând metoda integrării prin părți, să se calculeze $I_n = \int_0^n f(x) dx$, pentru $n \in \mathbf{N}$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 041

Varianta 41

Subiectul I

- a) $P_{ABC} = 30^\circ$.
 b) $m(\hat{B}) = 90^\circ$.
 c) $S_{ABC} = 30$.
 d) $\cos(B\hat{A}C) = \frac{5}{13}$.
 e) Mijlocul M al segmentului $(BC) \Rightarrow M(-3, -3)$.
 f) $a = 0$, $b = -3$.

Subiectul II

1.

- a) $n = 2$.
 b) $x = 8$.
 c) $V(0,0)$.
 d) $4! - 3! = 18$.
 e) $e = 3$.

2.

- a) $f'(x) = 2 - 2x$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -2$.
 c) $V(1, 1)$ este punct de extrem local.
 d) $f'(x) \geq 0 ; \forall x \in (-\infty, 1]$, deci funcția este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 1]$.
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} f(n) \right) = -1$.

Subiectul III

- a) $(2X - 1)(2X^2 - 2X + 1) = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 1 = f$.
 b) Câtul împărțirii este $2x^2 - 2x + 1$ și restul 0.
 c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1+i}{2}, x_2 = \frac{1-i}{2}$ sau $x_3 = \frac{1}{2} \in \mathbf{R}$.
 d) Din punctele a) și c) obținem $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$.
 e) $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{4}{4} = 1$.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$
.

f) $P(n): 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbf{N}^*$.

$$P(1): 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \text{ - adevarat.}$$

Presupunând că $P(k)$ este adevarată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevarată.

$$\text{Dar } 1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Deci $P(k+1)$ este adevarată.

$$\text{În baza inducției matematice } 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}; \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

g) $f(1)+f(2)+\dots+f(n) =$
 $= 4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) - 6(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 4(1+2+\dots+n) - n =$
 $= 4 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^4.$

Subiectul IV

a) $x^2 \geq 0; e^{-x} \geq 0; \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^2 e^{-x} \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}.$

b) $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(2x - x^2).$

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow x=0; 2-x=0 \Rightarrow x=2.$

Se constată că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și pe $(2, \infty)$ și crescătoare pe intervalul $[0, 2]$. Rezultă că $x=0$ este punct de minim local și $x=2$ este punct de maxim local.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0, \Rightarrow y=0$ este asymptota orizontală spre $+\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}(2x-x^2)}{x^2 \cdot e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-x^2}{x^2} = -1.$

f) $I_n = \int_0^n f(x) dx = \int_0^n x^2 e^{-x} dx = \int_0^n x^2 (-e^{-x})' dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^n + \int_0^n 2x e^{-x} dx =$
 $= -n^2 e^{-n} - 2x e^{-x} \Big|_0^n + \int_0^n 2e^{-x} dx = -e^{-n} (n^2 + 2n + 2) + 2.$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n^2 + 2n + 2}{e^n} \right) = 2.$