

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta039

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine partea reală a numărului complex $1 - i\sqrt{7}$
- (4p) b) Să se calculeze perimetru unui triunghi echilateral având lungimea laturii 2.
- (4p) c) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât dreapta $ax + y = b$ să conțină punctele $A(-1,1)$ și $B(3,5)$.
- (4p) d) Să se calculeze numărul complex $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$.
- (2p) e) Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi cu lungimile laturilor 3, 4, 5.
- (2p) f) Să se calculeze $\cos x$, știind că $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se rezolve ecuația $C_n^1 = 5, n \in \mathbf{N}, n \geq 1$
- (3p) b) Se dă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Să se calculeze $(f \circ f)(2)$.
- (3p) c) Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + 3X + a$, $f \in \mathbf{R}[X]$. Să se determine parametrul real a , astfel încât $f(1) = 2$.
- (3p) d) Pe \mathbf{R} se consideră legea de compozitie $x * y = x + y + 7$. Să se determine elementul neutru al legii “*”
- (3p) e) Să se calculeze A^2 , dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 8$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se rezolve, în \mathbf{R} , ecuația $f(x) = 0$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$.
- (3p) d) Să se rezolve, în \mathbf{R} , ecuația $f'(x) + f(x) = 8$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G = \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid f(x) = ax + 1 - a, a \in \mathbf{R}^*, \forall x \in \mathbf{R}\}$ și funcția $1_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, 1_{\mathbf{R}}(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se arate că dacă $f, g \in G$, atunci $f \circ g \in G$.
- (4p) b) Să se arate că $1_{\mathbf{R}} \in G$.
- (4p) c) Să se arate că $f \circ 1_{\mathbf{R}} = 1_{\mathbf{R}} \circ f = f, \forall f \in G$.
- (2p) d) Să se rezolve, în \mathbf{R} , ecuația $ax + 1 - a = x$, unde $a \in \mathbf{R}^*, a \neq 1$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $f \in G$, $f(x) = ax + 1 - a$ și $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x-1+a}{a}$, atunci $g \in G$ și $f \circ g = g \circ f = 1_{\mathbf{R}}$.
- (2p) f) Să se arate că mulțimea G , împreună cu compunerea funcțiilor, formează o structură de grup comutativ.
- (2p) g) Să se arate că există $x_0 \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(x_0) = x_0, \forall f \in G$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f(x) = x + \frac{2x}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)dx$.
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x)$.
- (2p) d) Să se determine ecuația asymptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.
- (2p) f) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .

Varianta 39

Subiectul I

- a) $Re(z) = 1$
- b) $P = 6$.
- c) $a = -1, b = 2$.
- d) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = 1$.
- e) $R = \frac{5}{2}$.
- f) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Subiectul II

1.

- a) $n = 5$.
- b) $f(f(2)) = 5$.
- c) $a = -1$.
- d) $e = -7 \in \mathbf{R}$.
- e) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

2.

- a) $f'(x) = 3x^2, \forall x \in \mathbf{R}$.
- b) $x = -2$.
- c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 3$.
- d) $x_1 = x_2 = 0$ și $x_3 = -3$.
- e) $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{31}{4}$.

Subiectul III

Pentru $a \in \mathbf{R}^*$, notăm $f_a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f_a = ax + 1 - a$. Deci $G = \{f_a \mid a \in \mathbf{R}^*\}$.

- a) $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = a(bx + 1 - b) + 1 - a = abx + 1 - ab \Rightarrow f_a \circ f_b = f_{ab}$, cu $ab \neq 0$.
- b) $1_{\mathbf{R}} = f_1 \in G$.
- c) $f_a \circ 1_{\mathbf{R}} = f_a \circ f_1 = f_{a1} = f_a = 1_{\mathbf{R}} \circ f_a, \forall f_a \in G$.

d) Din $ax + 1 - a = x \Rightarrow x(a-1) = a-1$, $a \in R^*, a \neq 1 \Rightarrow x = 1$.

e) $g(x) = \frac{x-1+a}{a} = f_{\frac{1}{a}} \cdot$ Cum $f_a \circ f_{\frac{1}{a}} = f_{\frac{1}{a} \cdot a} = f_1 = 1_R$ și $f_{\frac{1}{a}} \circ f_a = f_{\frac{1}{a} \cdot a} = f_1 = 1_R$
obținem $f \circ g = g \circ f = 1_R$.

f) Compunerea funcțiilor este asociativă; din a) rezultă partea stabilă ; din b) și c)
elementul neutru este 1_R ; din e) rezultă că $\forall a \in R^*, (f_a)^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

Cum $f_a \circ f_b = f_{ab} = f_b \circ f_a$ rezultă că „ \circ ” este comutativă.

Deci (G, \circ) este grup abelian.

g) Din $f(x_0) = ax_0 + 1 - a = x_0$, rezultă $x_0(a-1) = a-1$.

Pentru $a = 1$ obținem o infinitate de soluții.

Pentru $a \neq 1 \Rightarrow x_0 = 1$.

Subiectul IV

a) $x + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1} = f(x), \forall x \in R$.

b) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(x + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1) \right) \Big|_{-1}^1 = 0$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{2x}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1} = -\infty$. Deci funcția nu admite asimptotă orizontală

spre $-\infty$. Asimptota oblică este $y = mx + n$, unde $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x}{x^3 + x} = 1$ și

$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{2x}{x^2 + 1} - x \right) = 0$, deci $y = x$ este asimptota oblică

spre $-\infty$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{2} + \ln(x^2 + 1)}{x^2} = \frac{1}{2}$, deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = 0$.

f) $f'(x) = \left(x + \frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = 1 + \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3}{(x^2 + 1)^2}$.

g) $f'(x) > 0, \forall x \in R$, deci funcția f este crescătoare pe R .