

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**  
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**  
**PROBA D/F**

**Varianta ....038**

**Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările**

**Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale**

**NOTĂ.**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze numărul complex  $(2+i)^2 - (2-i)^2$ .
- (4p) b) Să se calculeze numărul  $\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3}$ .
- (4p) c) Să se determine aria triunghiului  $ABC$  cu vârfurile  $A(2, 3)$ ,  $B(-2, 5)$  și  $C(-3, -2)$ .
- (4p) d) Să se determine partea reală a numărului complex  $z = \frac{1}{3-i}$ .
- (2p) e) Să se găsească soluțiile ecuației  $\sin x = 0$ , pentru  $x \in [0, \pi]$ .
- (2p) f) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele  $A(2, 3)$  și  $B(-2, 5)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1. Se consideră polinomul  $f = X^3 - X^2 + X - 1$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ .
  - (3p) a) Să se arate că  $f = (X-1)(X^2+1)$ .
  - (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii  $\{-1, 0, 1\}$  să fie rădăcină a polinomului  $f$ .
  - (3p) c) Să se determine rădăcinile polinomului  $f$ .
  - (3p) d) Să se calculeze  $x_1 + x_2$  și  $x_1 \cdot x_2$ , unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcinile complexe, care nu sunt reale, ale polinomului  $f$ .
  - (3p) e) Să se rezolve ecuația  $f(\log_3 x) = 0$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = -x^2 + 4$ .
  - (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ , pentru  $x \in \mathbf{R}$ .
  - (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
  - (3p) c) Să se determine punctul de extrem al funcției  $f$ .
  - (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(0, \infty)$ .
  - (3p) e) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele verticale de ecuații  $x = -2$  și  $x = 2$ .

**Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările**

**Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale**

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Pe mulțimea  $\mathbf{R}$ , definim legea de compoziție  $x \circ y = xy - x - y + 2$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ . Fie

$$G = (1, +\infty).$$

- (4p) a) Să se arate că  $x \circ y = (x-1)(y-1) + 1$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că dacă  $x, y \in G$ , atunci  $x \circ y \in G$ .
- (4p) c) Să se demonstreze că  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ ,  $\forall x, y, z \in G$ .
- (2p) d) Să se arate că există  $e \in G$  astfel încât  $x \circ e = e \circ x = x$ ,  $\forall x \in G$ .
- (2p) e) Să se rezolve ecuația  $3 \circ x \circ 3 = 9$ ,  $x \in G$ .
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că  

$$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ n\ ori} = (x-1)^n + 1, \quad \forall x \in G, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$
.
- (2p) g) Să se calculeze  $\underbrace{2 \circ 2 \circ \dots \circ 2}_{de\ 2007\ ori}$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$  și  $g(x) = f(x) - \ln x$ .

- (4p) a) Să se arate că  $g'(x) = -\frac{(1-x)^2}{x \cdot (1+x)^2}$ , pentru  $x \in (0, +\infty)$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $f(1)$ ,  $g(1)$  și  $g'(1)$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (2p) d) Să se arate că dreapta de ecuație  $x = 0$  este asimptotă verticală la graficul funcției  $g$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .
- (2p) f) Să se arate că funcția  $g$  este descrescătoare pe intervalul  $[1, +\infty)$ .
- (2p) g) Să se demonstreze că  $\frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x$ ,  $\forall x \in [1, +\infty)$ .

**Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările**

**Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale**

### Varianța 38

#### Subiectul I

- a)  $(2+i)^2 - (2-i)^2 = 8i$ .
- b)  $\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ .
- c)  $S_{ABC} = 15$ .
- d) Partea reală a numărului complex este  $\frac{3}{10}$ .
- e)  $x = 0$  și  $x = \pi$ .
- f)  $M$  este mijlocul segmentului  $(AB) \Rightarrow M(0,4)$ .

#### Subiectul II

1.

a)  $(X-1)(X^2+1) = X^3 + X - X^2 - 1 = f$ .

b)  $p = \frac{1}{3}$ .

c) obținem rădăcinile  $1, -i, i$ .

d)  $x_1 + x_2 = 0, x_1 x_2 = 1$ .

e)  $x = 3$ .

2.

a)  $f'(x) = -2x, \forall x \in \mathbf{R}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ .

c)  $x = 0$  este punct de maxim local.

d)  $f'(x) < 0, \forall x > 0$ , rezultă că  $f$  este strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$ .

e)  $\int_{-2}^2 |f(x)| dx = \frac{32}{3}$ .

#### Subiectul III

a)  $(x-1)(y-1)+1 = xy - x - y + 2 = x \circ y, \forall x, y \in \mathbf{R}$ .

b) Din  $x \in G, y \in G$  rezultă  $x-1 > 0, y-1 > 0$  deci  $(x-1)(y-1) > 0$  atunci  $(x-1)(y-1) + 2 > 1$  adică  $x \circ y > 1$ .

c)  $(x \circ y) \circ z = xyz - xy - xz - yz + x + y + z = x \circ (y \circ z)$ .

d)  $x \circ e = x, \forall x \in (1, \infty) \Leftrightarrow x(e-1) - e + 2 = x, \forall x \in (1, \infty)$ . Identificând coeficienții obținem  $e = 2 \geq 1$  și se verifică că  $2 \circ x = x, \forall x \in G$ .

e) Din  $3 \circ x = 2x - 1$  și folosind punctul c) obținem  $(3 \circ x) \circ 3 = 9 \Leftrightarrow (2x - 1) \circ 3 = 9$ . Folosind punctul a) avem  $2(2x - 2) + 1 = 9$ , de unde  $x = 3$ .

f) Pentru  $n = 1$  avem  $x = (x - 1)^1 + 1$ , de unde  $x = x$  adevărat.

Presupunem adevărat pentru  $n = k$ :  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{k \text{ ori}} = (x - 1)^k + 1, k \in \mathbb{N}^*$ .

Vom arăta că  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{(k+1) \text{ ori}} = (x - 1)^{k+1} + 1$ .

$$\text{Dar } \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{(k+1) \text{ ori}} = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{k \text{ ori}} \circ x = [(x - 1)^k + 1] \circ x \stackrel{a)}{=} (x - 1)^k (x - 1) + 1 = (x - 1)^{k+1} + 1.$$

În baza inducției matematice avem  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} = (x - 1)^n + 1, \forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

g)  $\underbrace{2 \circ 2 \circ \dots \circ 2}_{2007 \text{ ori}} \stackrel{f)}{=} (2 - 1)^{2007} + 1 = 1 + 1 = 2$ .

#### Subiectul IV

a)  $f'(x) = \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$ .

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{x} = \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{(1-x)^2}{x(x+1)^2}, \forall x > 0.$$

b)  $f(1) = 0$ ;  $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$ ;  $g'(1) = 0$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-1)}{x+1} = 2$ .

d)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$ . Deci  $x = 0$  este asimptota verticală la graficul funcției  $g$ .

e)  $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left( 2 - \frac{4}{x+1} \right) dx = 2e - 2 + 4 \ln \frac{2}{e+1}$ .

f)  $g'(x) \leq 0, \forall x \in [1, \infty)$ . Deci  $g$  este descrescătoare pe intervalul  $[1, \infty)$ .

g) Din  $g$  descrescătoare pe intervalul  $[1, \infty)$  și  $g(1) = 0$  rezultă că

$$g(x) \leq 0, \forall x \in [1, \infty), \text{ de unde } \frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x, \forall x \in [1, \infty).$$