

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta037

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex $z = 7 - i$.
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului echilateral având lungimea laturii 7.
- (4p) c) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(1,3)$ și $B(2,1)$.
- (4p) d) Să se calculeze $\sin \pi + \cos \pi$.
- (2p) e) Să se calculeze diagonala dreptunghiului care are lungimea 4 și lățimea 3.
- (2p) f) Să se calculeze aria triunghiului care are lungimile laturilor de 3, 4 și 5 .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $\log_7 49$.
- (3p) b) Să se calculeze determinantul matricei $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.
- (3p) c) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 7$. Să se calculeze $(f \circ f)(3)$.
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ să fie număr impar.
- (3p) e) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $7^x = \sqrt{7}$.

- 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-1)^{2007}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) c) Să se calculeze $f(1)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int f(x) dx$.

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{2007}}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră pe $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ legea de compozitie $x * y = x + y - 3xy$.

- (4p) a) Să se calculeze $1 * 2$.
- (4p) b) Să se arate că legea "*" este comutativă.
- (4p) c) Să se arate că legea * este asociativă.
- (2p) d) Să se determine $e \in \mathbf{R}$, astfel încât $e * x = x * e = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se rezolve, în \mathbf{R} , ecuația $x * 3 = -5$.
- (2p) f) Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+1} * 2 = -3$, $x \geq -1$.
- (2p) g) Să se arate că mulțimea $\mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ împreună cu legea de compozitie "*" are o structură de grup abelian.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2+x^2}{x}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(1)$, $f(-1)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
- (4p) c) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) e) Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $[2, \infty)$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că $f(x) > 2\sqrt{2}$, $\forall x \in [2, \infty)$.

Varianta 37

Subiectul I

- a) $\bar{z} = 7 + i$.
- b) $S = \frac{49\sqrt{3}}{4}$.
- c) $AB = \sqrt{5}$.
- d) $\sin \pi + \cos \pi = -1$.
- e) $d = 5$.
- f) $S = 6$.

Subiectul II

1.

- a) $\log_7 49 = 2$.
- b) $\det B = 51$.
- c) $(f \circ f)(3) = -11$.
- d) $p = \frac{4}{7}$.
- e) $x = \frac{1}{2}$.

2.

- a) $f'(x) = 2007(x-1)^{2006}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2007$.
- c) $f(1) = 0$.
- d) $\int f(x) dx = \frac{(x-1)^{2008}}{2008} + C$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{2007}} = 1$.

Subiectul III

- a) $1 * 2 = 1 + 2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = -3$.
- b) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ avem $x * y = x + y - 3xy = y + x - 3yx = y * x$.
- c) $(x * y) * z = x * (y * z) = x + y + z - 3xy - 3xz - 3yz + 9xyz$.
- d) $x * e = x \Leftrightarrow x + e - 3xe = x \Leftrightarrow e(1 - 3x) = 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow e = 0 \in \mathbf{R}$.
- e) $x * 3 = -5 \Leftrightarrow x + 3 - 3 \cdot x \cdot 3 = -5 \Leftrightarrow -8x = -8 \Leftrightarrow x = 1$.
- f) $\sqrt{x+1} * 2 = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 - 6\sqrt{x+1} = -3 \Leftrightarrow -5\sqrt{x+1} = -5 \Rightarrow x = 0 \geq -1$.

g) Parte stabilă: $\forall x, y \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ avem $x \neq \frac{1}{3}, y \neq \frac{1}{3}$ de unde
 $\left(x - \frac{1}{3} \right) \left(y - \frac{1}{3} \right) \neq 0 \Rightarrow 3xy - x - y + \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow x + y - 3xy \neq \frac{1}{3} \Rightarrow x * y \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

"*" este asociativă din **c)** și comutativă din **b)**.

Elementul neutru al operației este $0 \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

Elemente simetrizabile: $\forall x \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}, \exists x' \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\} : x * x' = x' * x = e$

$$x + x' - 3xx' = 0 \Leftrightarrow x'(1 - 3x) = -x.$$

Deoarece $x \neq \frac{1}{3} \Rightarrow x' = \frac{x}{3x-1}$. Se arată că $x' \neq \frac{1}{3}$.

În concluzie $\left(\mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}; * \right)$ grup abelian.

Subiectul IV

a) $f(1) = 3; f(-1) = -3$.

b) $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}, x \in \mathbf{R}^*$.

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2+x^2}{x} = -\infty$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2+x^2}{x} = +\infty$; rezultă că dreapta

$x = 0$ este asimptota verticală la graficul funcției f .

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x^2}{x} = +\infty \Rightarrow G_f$ nu admite asimptotă orizontală.

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x^2}{x^2} = 1$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .

e) Din $x \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{x^2} > 0$. Deci $f'(x) > 0, \forall x \in [2, \infty)$. Rezultă că funcția f este crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

f) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(x + \frac{2}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2 \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{2} + 2 \ln 2$.

g) Din punctul **e)** rezultă că funcția f este crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.

Atunci $\forall x \geq 2$ avem $f(x) \geq f(2) = 3 > 2\sqrt{2}$.