

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta036

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze aria unui triunghi cu lungimile laturilor 3, 4, 5 .
- (4p) b) Să se calculeze $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(2,1)$ și $B(2,-1)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$
- (4p) c) Să se determine punctul de intersecție a dreptelor de ecuații $-2x + y - 1 = 0$ și $x + 2y - 4 = 0$.
- (4p) d) Să se verifice dacă punctul $A(1,3)$ este situat pe dreapta de ecuație $x + y - 4 = 0$
- (2p) e) Să se determine partea reală a numărului complex $\frac{1}{1+2i}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\cos 30^\circ - \sin 60^\circ + \tan 45^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $-x^2 + 9 > 0$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1,2,3,\dots,17\}$ să fie impar.
- (3p) c) Să se determine câtul împărțirii polinomului $f = X^4 + X^3 - 2X^2 + X - 3$ la polinomul $X^2 + 3X + 2$.
- (3p) d) Să se arate că punctul $A(-1,5)$ este situat pe graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 4$
- (3p) e) Să se rezolve în \mathbb{R} , ecuația $(x+1)(-x^2 + 9) = 0$
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + 6$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3 + 1}$.
- (3p) d) Să se rezolve, în \mathbb{R} , ecuația $f'(x) = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

- Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- (4p) b) Să se calculeze matricea A^2 .
- (4p) c) Să se determine numărul real a astfel încât $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2$
- (2p) d) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -2x - 3y = 0 \end{cases}, x, y \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că $\det(I_2 + A^n) = 1, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $(I_2 + A)^n = I_2 + n \cdot A, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se calculeze determinantul matricei $B = I_2 + 2A + 3A^2 + \dots + 2005A^{2004}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$ și sirul

$(a_n)_{n \geq 1}$, definit prin $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.

- (4p) a) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}, \forall x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x), x \in (0, \infty)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.
- (2p) d) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) e) Să se arate că $a_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{n^2}$.

Varianța 36

Subiectul I

- a) $S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.
- b) $a = 0, b = -2$.
- c) Punctul de intersecție este $P\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$.
- d) $1 + 3 - 4 = 0$, adevărat, deci A se găsește pe dreapta dată.
- e) partea reală a numărului complex este $\frac{1}{5}$.
- f) $\cos 30^\circ - \sin 60^\circ + \tan 45^\circ = 1$.

Subiectul II

1.

a) $x \in (-3, 3)$.

b) $p = \frac{9}{17}$.

c) Din algoritmul de împărțire al polinoamelor obținem câtul $C(X) = X^2 - 2X + 2$.

d) Punctul $A \in G_f \Leftrightarrow f(-1) = 5$.

e) $S = \{-3, -1, 3\}$.

2.

a) $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 16$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3 + 1} = 1$.

d) $S = \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$.

e) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{79}{12}$.

Subiectul III

a) $\det A = 0$.

b) $A^2 = O_2$.

c) $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 \Leftrightarrow I_2 + aA + A + aA^2 = I_2 \Leftrightarrow (a+1) \cdot A = O_2 \Leftrightarrow a+1=0$ de unde $a=-1$.

d) Rezolvând sistemul obținem soluția $S = \{(0,0)\}$.

e) Din b) rezultă $A^k = O_2, \forall k \geq 2 \Rightarrow \det(I_2 + A^n) = \det I_2 = 1$.

f) Se demonstrează folosind metoda inducției matematice.

Pentru $n=1$ avem $I_2 + A = I_2 + 1 \cdot A$, adevărat.

Presupunem adevărată pentru $n=k \Rightarrow (I_2 + A)^k = I_2 + kA, k \in \mathbf{N}^*$.

Vom arăta că $(I_2 + A)^{k+1} = I_2 + (k+1)A$.

$(I_2 + A)^{k+1} = (I_2 + A)^k \cdot (I_2 + A) = (I_2 + kA)(I_2 + A) = I_2 + A + kA + kA^2 = I_2 + (k+1)A$

în baza inducției matematice obținem $(I_2 + A)^n = I_2 + nA, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $B = I_2 + 2A + 3A^2 + \dots + 2005A^{2004} = I_2 + 2A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, deci $\det B = 1$.

Subiectul IV

a) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = f(x), \forall x > 0$.

b) $f'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$.

c) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 + \frac{1}{x+1} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = 0$ rezultă $y=0$ este asimptota orizontală la graficul funcției f spre $+\infty$ și atunci graficul funcției nu are asimptotă oblică.

e) $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) \stackrel{a)}{=} \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n^2 + 2n + 1} \right)^{\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{-1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n^2 + 2n + 1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.