EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D/F

Varianta ….**035**

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele $A(-1,-1)$ și $B(2,-3)$.

(4p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile $A(-3,0)$, $B(0,1)$, $C(0,-1)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$.

(4p) **d)** Să se determine conjugatul numărului complex $3+4i$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria unui pătrat având lungimea laturii 4.

(2p) **f)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele de ecuații $ax+5y=3$ şi $2x+y=5$ să fie paralele.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze media aritmetică a numerelor 3, 10, 17, 24, 31.

(3p) **b)** Să se calculeze 3% din 60.

(3p) **c)** Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1, 2, ..., 10\}$ să fie număr par.

(3p) **d)** Să se calculeze $\log_4 \dfrac{1}{16}$.

(3p) **e)** Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^3 + 2X + 1$ la polinomul $g = X - 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x - 2$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(3p) **b)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $f(x) = 0$.

(3p) **c)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^3}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

(4p) **b)** Să se calculeze A^2.

(4p) **c)** Să se arate că $A^2 - 2A + I_2 = O_2$.

(2p) **d)** Să se calculeze $(A - I_2)^2$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\det(A) + \det(A^2) + \ldots + \det(A^{2007})$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\det(A + A^2 + \ldots + A^{2007})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)}$ și șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$,

$a_n = f(1) + f(3) + \ldots + f(2n+1)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(1)$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2(x+2)}$, $\forall\, x > 0$.

(4p) **c)** Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x > 0$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $(0, \infty)$.

(2p) **e)** Să se arate că $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot (a_n - \dfrac{1}{2})$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\, dx$.

Varianta 35

Subiectul I

a) $AB = \sqrt{13}$.

b) $S_{ABC} = 3$.

c) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$.

d) $\overline{3+4i} = 3-4i$.

e) $S = 16$.

f) $a = 10$.

Subiectul II

1.

a) $m_a = 17$.

b) $\frac{3}{100} \cdot 60 = 1{,}8$.

c) $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

d) $\log_4 \frac{1}{16} = -2$.

e) $r = 4$.

2.

a) $f(1) = 0$.

b) $x = 1$.

c) $f'(x) = 3x^2 + 1$.

d) $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{5}{4}$.

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$.

Subiectul III

a) $\det A = 1$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $A^2 - 2A + I_2 = O_2$.

d) Deoarece $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A$ rezultă $(A - I_2)^2 = A^2 - 2A + I_2 \overset{c)}{=} O_2$.

e) Pentru $n=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ - adevărat.

Presupunem adevărat pentru $n=k$ şi vom demonstra că este adevărat şi pentru $n=k+1$.

Cum $A^{k+1}=A^k \cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3k & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3(k+1) & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3n & 1\end{pmatrix} \forall n \in N^*$.

f) $\det(A)+\det(A^2)+\ldots+\det(A^{2007})=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3\cdot 2 & 1\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3\cdot 2007 & 1\end{vmatrix}=$

$=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2007}=2007$.

g) $A+A^2+\ldots+A^{2007}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3\cdot 2 & 1\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3\cdot 2007 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2007 & 0\\ 3(1+2+\ldots+2007) & 2007\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+A^2+\ldots+A^{2007})=2007^2$.

Subiect IV

a) $f(1)=\dfrac{1}{1\cdot 3}=\dfrac{1}{3}$.

b) $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2(x+2)}=\dfrac{x+2-x}{2x(x+2)}=\dfrac{1}{x(x+2)}=f(x), \forall x>0$.

c) $f'(x)=-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2(x+2)^2}=\dfrac{-2(x+1)}{x^2(x+2)^2}$.

d) $f'(x)<0, \forall x>0$, deci funcția f este descrescătoare pe $(0,\infty)$.

e) $a_n=f(1)+f(3)+\ldots+f(2n+1)=$

$=\dfrac{1}{2\cdot 1}-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3}-\dfrac{1}{2\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{2\cdot(2n+1)}-\dfrac{1}{2\cdot(2n+3)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2n+3)}=$

$=\dfrac{n+1}{2n+3}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\dfrac{n+1}{2n+3}-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{2(2n+3)}=-\dfrac{1}{4}$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{2x+4}\right)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{n+1}{n}-\ln\dfrac{n+3}{n+2}\right)=0$.