

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D/F

Varianta ...034

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică: profil Uman, specializarea științe sociale; Filiera vocațională: profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete
SUBIECTUL I (20p)

 În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(-3,-4)$, $B(4,-3)$, $C(-4,3)$.

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului (BC) .
- (4p) b) Să se arate că punctele B , O și C sunt coliniare.
- (4p) c) Să se calculeze distanța de la punctul A la punctul B .
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului AOB .
- (2p) e) Să se calculeze $2 \cdot \sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ$.
- (2p) f) Să se calculeze partea reală a numărului complex $(4-3i)(3-4i)$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se rezolve ecuația $\log_2(2^x) = \log_2 8$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $C_5^1 + C_5^4$.
- (3p) c) Să se calculeze termenul din mijloc al dezvoltării $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$, pentru $x > 0$.
- (3p) d) Să se determine câte numere $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ verifică inegalitatea $n^2 - 6n + 5 \geq 0$.
- (3p) e) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $(x-2)(x-3) = 2x^2 - 4x$.

2.

 Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 7x^6 + 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.
- (3p) d) Să se determine punctul de extrem al funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică: profil Uman, specializarea științe sociale; Filiera vocațională: profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_3(\mathbf{R})$ se consideră matricele $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4p) a) Să se calculeze determinantul matricei $A + B$.

(4p) b) Să se arate că $A^3 = O_3$.

(4p) c) Să se arate că $AB = BA = I_3 - B$.

(2p) d) Să se calculeze $(A + I_3) \cdot B$.

(2p) e) Să se calculeze $(I_3 - A^2)(I_3 + A^2)$.

(2p) f) Să se calculeze $\det(A + B) + \det(A^2 + B) + \dots + \det(A^{10} + B)$.

(2p) g) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $(I_3 + A)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 - n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$.

(4p) a) Să se calculeze $f(2) + f(3)$.

(4p) b) Să se arate că $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, $x > 0$.

(4p) c) Să se calculeze $\int_1^e (x+1) \cdot f'(x) dx$.

(2p) d) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe $(0, \infty)$.

(2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

(2p) f) Să se calculeze $\int_1^e \left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx$.

(2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n))$.

Varianta 34

SUBIECTUL I

a) $BC = 10$.

b) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ punctele sunt coliniare.

c) $AB = 5\sqrt{2}$.

d) $S_{ABC} = \frac{25}{2}$.

e) $2\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{5}{4}$.

f) $\operatorname{Re}(z) = 0$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = 3$.

b) $C_5^1 + C_5^4 = 10$.

c) $T_3 = 6$.

d) $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

e) $x \in \{-3; 2\}$.

2.

a) $f(1) = 8$.

b) $f'(x) = 42x^5$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 0$.

d) $x = 0$ este punct de minim local.

e) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A + B) = 1$.

$$\text{b) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } A^3 = A^2 \cdot A = O_3.$$

$$\text{c) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Analog } B \cdot A = A \cdot B = I_3 - B.$$

$$\text{d) } (A + I_3) \cdot B = AB + B = I_3 - B + B = I_3.$$

$$\text{e) } (I_3 - A^2)(I_3 + A^2) = I_3 + A^2 - A^2 - A^4 = I_3.$$

$$\text{f) } A^2 + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ deci } \det(A^2 + B) = 1 \text{ și } \det(A + B) = 1, \det B = 1.$$

$$\text{Atunci } \det(A + B) + \det(A^2 + B) + \dots + \det(A^{10} + B) = \\ = \det(A + B) + \det(A^2 + B) + 8 \cdot \det B = 1 + 1 + 8 = 10.$$

$$\text{g) } \text{Pentru } n = 1 \text{ avem } (I_3 + A)^1 = I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ adevărat.}$$

Presupunem adevărat pentru $n = k$. Vom demonstra că este adevărată și pentru $n = k + 1$.

$$(I_3 + A)^{k+1} = (I_3 + A)^k \cdot (I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2 - k \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) & 2k^2 + 3k + 1 \\ 0 & 1 & 2(k+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{În baza inducției matematice avem: } (I_3 + A)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 - n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Subiectul IV

$$\text{a) } f(2) + f(3) = \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} = -\ln 2.$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}, x > 0.$$

$$\text{c) } \int_1^e (x+1) \cdot f'(x) dx = \int_1^e (x+1) \cdot \frac{1}{x(x+1)} dx = \ln e - \ln 1 = 1.$$

d) $f'(x) > 0, \forall x > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int_1^e \left(f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx &= \int_1^e \left(\ln \frac{x}{x+1} - \ln \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty. \end{aligned}$$