

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta ...033

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările
 Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale
 NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine lungimea segmentului determinat de punctele $A(1,3)$ și $B(1,5)$.
- (4p) b) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele $E(-1,2)$ și $F(2,3)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin x$, pentru $\cos x = \frac{1}{3}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (4p) d) Să se calculeze $\cos^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{\pi}{9}$.
- (2p) e) Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{3+5i}{5-3i}$.
- (2p) f) Să se calculeze numărul complex i^{100} .

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f(x) = 5$, unde $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.
- (3p) c) Să se calculeze în câte moduri se pot aranja pe un raft 5 cărți.
- (3p) d) Să se determine numerele reale x, y astfel încât să aibă loc egalitatea $\begin{pmatrix} 3 & x \\ y-2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2x-3 \\ 4y+4 & -5 \end{pmatrix}$.
- (3p) e) Să se determine probabilitatea ca un element $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $3^{n+1} \leq 27$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, este crescătoare pe $(-\infty, 0)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2007}{n^2 f(n)}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 033

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimile $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ și $M = \left\{ x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \mid \frac{1}{x} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \right\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $0 \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ și $1 \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.
- (4p) b) Să se arate că, dacă $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, atunci $x + y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.
- (4p) c) Să se arate că, dacă $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, atunci $x \cdot y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.
- (2p) d) Să se arate că $3 + 2\sqrt{2}$ este un element din mulțimea M .
- (2p) e) Să se determine un element $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ astfel încât $x \notin M$.
- (2p) f) Să se arate că, dacă $x, y \in M$, atunci $x \cdot y \in M$.
- (2p) g) Să se determine un element din mulțimea $M \cap \left(0; \frac{1}{2007}\right)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_0(x) = e^{3x}$ și $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f_1(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0 .
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = 3^n e^{3x}$, $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se calculeze $f_0(0) + f_1(0) + \dots + f_n(0)$, $n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(0) + f_2(0) + \dots + f_n(0)}{f_{n+1}(0)}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_{2004}(t) dt}{f_{2004}(x)}$.
- (2p) g) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f_0(x) + f_1(x) = 4$.

Varianta 033

Subiectul I:

a) $AB = 2$;

b) Fie P mijlocul segmentului EF; am $x_p = \frac{1}{2}, y_p = \frac{5}{2}$;

c) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{8}{9}$ și cum $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin x > 0$, deci $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

d) $\sin^2 \frac{\pi}{9} + \cos^2 \frac{\pi}{9} = 1$;

e) $z = \frac{3+5i}{5-3i} = i \Rightarrow \operatorname{Im} z = 1$;

f) $i^{100} = (i^4)^{25} = 1^{25} = 1$;

Subiectul II:

1.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 20 = 22$;

b) ecuația este $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 2$;

c) În $5! = 120$ moduri;

d) Se obține $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$;

e) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;

2.

a) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = -\frac{3}{50}$;

c) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} > 0, (\forall)x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$;

d) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \arctgx \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2007}{n^2 f(n)} = 2007$

Subiectul III :

a) $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$; $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$;

b) Dacă $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \Rightarrow x = a + b\sqrt{2}, y = a' + b'\sqrt{2}$ cu $a, a', b, b' \in \mathbf{Z}$ și am: $x + y = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$

c) $x \cdot y = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$

d) Fie $z = 3 + 2\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ și $\frac{1}{z} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, deci $z \in M$

e) Exemplu: $z = \sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, dar $\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, deci $z \notin M$

f) Fie $x, y \in M \Rightarrow x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ și $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$; am $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ (am aplicat c))

g) Din d) am că $3 - 2\sqrt{2} \in M$ și cum $x, y \in M$, $(\forall)x, y \in M \Rightarrow (3 - 2\sqrt{2})^n \in M$, $(\forall)n \in \mathbf{N}$; Pe de altă parte $3 - 2\sqrt{2}$ e subunitar și evident pot găsi o infinitate de numere naturale n astfel încât $(3 - 2\sqrt{2})^n < \frac{1}{2007}$.

Subiectul IV :

a) $f_1(x) = f_0'(x) = 3e^{3x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală către $-\infty$;

c) $f_0(x) = 3^0 e^{3x}$ da. Presupun că $f_n(x) = 3^n e^{3x}$ și am $f_{n+1}(x) = f_n'(x) = (3^n e^{3x})' = 3^{n+1} e^{3x}$.

Deci $f_n(x) = 3^n e^{3x}$, $(\forall)x \in R, n \in \mathbf{N}$.

d) Suma cerută este $\sum_{k=0}^n f_k(0) = \sum_{k=0}^n 3^k \cdot e^{3 \cdot 0} = \sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f_k(0)}{f_{n+1}(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{3^n - 1}{2}}{3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2 \cdot 3^{n+1}} \right] = \frac{1}{2}$;

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_{2004}(t)dt}{f_{2004}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_{2005}'(t)dt}{f_{2004}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2005}(x) - f_{2005}(0)}{f_{2004}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{2005} \cdot e^{3x} - 3^{2005}}{3^{2004} \cdot e^{3x}} = \frac{3^{2005}}{3^{2004}} = 3$;

g) $f_0(x) + f_1(x) = 4 \Leftrightarrow x = 0$