

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
***Varianta ....032***

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $O(0,0)$ ,  $A(-3,4)$ ,  $B(4,3)$ ,  $C(3,-4)$

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului  $(BC)$ .
- (4p) b) Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului  $(AC)$ .
- (4p) c) Să se arate că  $OA = OB = OC$  .
- (4p) d) Să se demonstreze că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic.
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$  .
- (2p) f) Să se calculeze partea reală a numărului complex  $(3+4i)(4+3i)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se rezolve ecuația  $2^x + 2^{x+1} = 24$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $2 \cdot C_n^2 + n$ , pentru  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- (3p) c) Să se calculeze termenul al patrulea al dezvoltării  $(2x+3)^3$  .
- (3p) d) Să se determine câte numere  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  verifică inegalitatea  $6 - 2n \leq 1$ .
- (3p) e) Să se rezolve ecuația  $2x = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ .

2.

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f(2)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  .
- (3p) d) Să se arate că  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_{-2}^2 f(x) dx$  .

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_3(\mathbf{R})$  se consideră matricele  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- (4p) b) Să se arate că  $A^3 = O_3$ .
- (4p) c) Să se arate că  $A \cdot B = B \cdot A = I_3 - B$ .
- (2p) d) Să se calculeze  $(A + I_3) \cdot B$ .
  
- (2p) e) Să se demonstreze că  $\det((I_3 + A^2)(I_3 - A^2)) = 1$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $A + 2A^2 + 3A^3 + \dots + 10A^{10}$ .
  
- (2p) g) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $(I_3 + A)^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 6n^2 \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  pentru orice  $n \in \mathbf{N}^*$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$   $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right)$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f'(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$ ,  $x > 0$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\int_{\frac{1}{2}}^2 f'(x) dx$ .
  
- (2p) d) Să se demonstreze că funcția  $f$  este crescătoare pe  $(1, \infty)$ .
- (2p) e) Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției  $f$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2}$ .
  
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{2^2}) + \dots + f(\sqrt{2^n})}{2^n}$ .

### Varianta 32

#### **SUBIECTUL I**

- a)  $BC = 5\sqrt{2}$ .
- b) Punctul M este mijlocul (AC)  $\Rightarrow M(0,0)$ .
- c)  $OA = 5$ ,  $OB = 5$ ,  $OC = 5$ .
- d)  $AB = 5\sqrt{2}$ ,  $AC = 10$ ,  $BC = 5\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC$  este dreptunghic.
- e)  $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = \frac{1}{2}$ .
- f)  $\operatorname{Re}(z)=0$ .

#### **SUBIECTUL II**

**1.**

- a)  $x = 3$ .
- b)  $2C_n^2 + n = n^2$   $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .
- c)  $T_4 = 27$ .
- d) Avem trei numere.
- e)  $x_1 = 0$  și  $x_2 = \frac{1}{4}$ .

**2.**

- a)  $f(2) = 2$ .
- b)  $f'(x) = 3x^2 - 3$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -3$
- d)  $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .
- e)  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$ .

#### **SUBIECTUL III**

- a)  $\det(A) = 0$ .
- b)  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , și  $A^3 = O_3$ .
- c) Calcul direct.
- d)  $(A + I_3)B = A \cdot B + B = I_3$ .

e) Din  $\mathbf{b} \Rightarrow A^3 = O_3 \Rightarrow A^4 = O_3 \Rightarrow (I_3 + A^2)(I_3 - A^2) = I_3 - A^4 = I_3 \Rightarrow \det((I_3 + A^2)(I_3 - A^2)) = \det(I_3) = 1.$

f) Din  $\mathbf{b} \Rightarrow A^3 = O_3 \Rightarrow A^k = O_3 \forall k \geq 3$ , deci

$$A + 2A^2 + 3A^3 + \dots + 10A^{10} = A + 2A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g) Pentru  $n=1$  relația este adevărată. Presupunem adevărat că

$$(I_3 + A)^k = \begin{pmatrix} 1 & 3k & 6k^2 \\ 0 & 1 & 4k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și demonstrăm că } (I_3 + A)^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3k+3 & 6(k+1)^2 \\ 0 & 1 & 4k+4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(I_3 + A)^{k+1} = (I_3 + A)^k (I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 3k+3 & 6(k+1)^2 \\ 0 & 1 & 4k+4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De unde  $P(n)$  este (A)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

#### SUBIECTUL IV

a)  $f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

b)  $f'(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}.$

c)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 f'(x) dx = 0.$

d)  $f'(x) = \frac{2(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x^3} > 0, \forall x > 1 \Rightarrow$  funcția  $f$  este crescătoare pe  $(1, \infty)$ .

e) Dacă  $x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) < 0 \stackrel{d}{\Rightarrow} x = 1$  este punct de minim global  $\Rightarrow$  punctul de extrem este  $E(1, 2)$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^4} \right) = \frac{1}{2}.$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) + f(\sqrt{2}) + \dots + f(\sqrt{2^n})}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{2^n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1} - 1}{2^n} + \frac{2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{2^n}}{2^n} = 2.$$