

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
**Varianța ....029**

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**NOTĂ.**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine partea reală a numărului complex  $9 - 10i$ .
- (4p) b) Să se calculeze distanța dintre punctele  $A(1, 3)$  și  $B(2, 1)$ .
- (4p) c) Să se determine conjugatul numărului complex  $\sqrt{2} + \sqrt{7}i$ .
- (4p) d) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât punctul  $A(1, 1)$  să fie situat pe dreapta de ecuație  $x + ay + 2 = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin x$ , pentru  $\cos x = \frac{1}{4}$  și  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .
- (2p) f) Se consideră triunghiul dreptunghic  $ABC$ , având lungimile laturilor 3, 4 și 5.  
Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

- 1.
- (3p) a) Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ . Să se verifice dacă punctul  $M(1, -1)$  este situat pe graficul funcției  $f$ .
- (3p) b) Să se rezolve, în  $\mathbb{R}$ , ecuația  $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .
- (3p) c) Să se compare numerele  $\log_2 7$  și  $\log_2 5$ .
- (3p) d) Să se calculeze suma  $2 + 4 + 6 + \dots + 20$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $C_{10}^6$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ .
- (3p) a) Să se arate că  $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ .
- (3p) d) Să se arate că  $f$  este descrescătoare pe  $(1, \infty)$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_2^3 f(x) dx$ .

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_2(\mathbf{C})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

și mulțimea  $G = \{X \in M_2(\mathbf{R}) \mid AX = XA\}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $A \in G$  și  $I_2 \in G$ .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $A^2 = -I_2$ .
- (2p) d) Să se arate că  $A^2 X = X A^2$ ,  $\forall X \in M_2(\mathbf{R})$ .
- (2p) e) Să se arate că, dacă  $a, b \in \mathbf{R}$ , atunci matricea  $B = aI_2 + bA \in G$ .
- (2p) f) Să se arate că, dacă  $X \in G$ , atunci există  $u, v \in \mathbf{R}$  astfel încât  $X = uI_2 + vA$ .
- (2p) g) Să se calculeze determinantul matricei  $A + A^2 + \dots + A^{2007}$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 1 - x^2 + x^4$ .

Notăm cu  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o primitivă a funcției  $f$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f(1) + f(-1)$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f(x) = \frac{x^6 + 1}{x^2 + 1}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se determine coordonatele punctelor de extrem local ale funcției  $f$ .
- (2p) e) Să se arate că  $f(x) \geq \frac{3}{4}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{F(x)}$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .

### Varianță 29

#### Subiectul I

- a)  $\operatorname{Re}(z) = 9$ .
- b)  $AB = \sqrt{5}$ .
- c)  $\bar{z} = \sqrt{2} - \sqrt{7}i$ .
- d)  $a = -3$ .
- e)  $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .
- f)  $S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ .

#### Subiectul II

1.

- a) Punctul  $M(1, -1)$  se află pe graficul funcției  $f$ .
- b)  $x_1 = 0, x_2 = 7$ .
- c)  $7 > 5 \Rightarrow \log_2 7 > \log_2 5$ .
- d)  $S_{10} = 110$ .
- e)  $C_{10}^6 = 210$ .

2.

- a)  $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ .
- b)  $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \forall x \in R - \{1\}$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$ .
- d) Din punctul b) rezultă că  $f'(x) < 0, \forall x > 1$ . Prin urmare funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(1, \infty)$ .
- e)  $\int_2^3 f(x) dx = 1 + \ln 2$ .

#### Subiectul III

- a) Evident  $A$  comută cu  $A$ , deci  $A \in G$ . Din  $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$ , rezultă  $I_2 \in G$ .
- b)  $\det(A) = 1$ .
- c) Prin calcul obținem  $A^2 = -I_2$ .

d) Obținem  $A^2 X = X A^2 = -X$ ,  $\forall X \in M_2(\mathbf{R})$ .

e)  $BA = AB = aA - bI_2$ , deci  $B \in G$ .

f) Fie  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Din  $XA = AX$  obținem  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-2b \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ . Căutăm

$u, v \in \mathbf{R}$ ,  $X = uI_2 + vA$ . Obținem  $\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & v \\ -2v & -v \end{pmatrix}$ . Rezultă

$u = a - b$  și  $v = b$ .

g) Avem  $A + A^2 + A^3 + A^4 = A - I_2 - A + I_2 = O_2$ . Atunci

$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2007} = O_2 + A - I_2 - A = -I_2 \Rightarrow \det(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2007}) = 1$ .

#### Subiectul IV

a)  $f(1) = 1$  și  $f(-1) = 1$ . Deci  $f(1) + f(-1) = 2$ .

b)  $\frac{x^6 + 1}{x^2 + 1} = x^4 - x^2 + 1 = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

c)  $f'(x) = 4x^3 - 2x$ .

d)  $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Din tabelul de variație

obținem:  $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\right)$  punct de minim;  $B(0, 1)$  punct de maxim;  $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}\right)$  punct de minim.

e) Din punctul d) obținem că  $f(x) \geq f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , deci

$f(x) \geq \frac{3}{4}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

f)  $\int f(x)dx = \int (x^4 - x^2 + 1)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x + C$ , deci o primitivă a funcției  $f$  este

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^3 + x}{\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + x} = 5.$$

$$g) \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{13}{15}.$$