

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
***Varianta ....028***

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele  $M(1, 2)$ ,  $N(-2, 1)$ .
- (4p) b) Să se verifice dacă dreptele de ecuație  $2x - y + 5 = 0$  și  $y = 2x - 7$  sunt paralele.
- (4p) c) Se consideră un triunghi dreptunghic cu laturile de lungimi 3, 4 și 5. Să se determine lungimea înălțimii dusă din unghiul drept al triunghiului.
- (4p) d) Să se calculeze partea reală a numărului complex  $(2 - 10i)(1 + i)$ .
- (2p) e) Să se calculeze numărul complex  $(1 - i)^4$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $3\sin \frac{\pi}{2} + \cos 0$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Se consideră polinomul  $f = X^3 + 5X^2 - 7X + 1$ . Să se calculeze  $f(1)$ .
- (3p) b) Dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ , să se calculeze probabilitatea ca un element al matricei  $A^2$  să fie egal cu 0.
- (3p) c) Dacă într-o progresie geometrică primul termen este -2 și rația este 3, să se determine termenul al patrulea.
- (3p) d) Să se rezolve, în C, ecuația  $2x^2 - x + 1 = 0$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\begin{vmatrix} 2004 & 0 & 2005 \\ 2006 & 0 & 2007 \\ 2008 & 0 & 2009 \end{vmatrix}$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x \cdot f(x))$ .
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ .

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_2(\mathbf{Z})$ , se consideră matricele  $P = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și mulțimea } G = \left\{ A \in M_2(\mathbf{Z}) \mid A^2 = I_2 \right\}.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $I_2 \in G$ .
- (4p) b) Să se arate că  $P \in G$  și  $Q \in G$ .
- (4p) c) Să se calculeze determinantul matricei  $P$ .
- (2p) d) Să se calculeze  $P \cdot Q$ .
- (2p) e) Să se arate că  $P \cdot Q \notin G$ .
- (2p) f) Să se arate că, dacă  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\forall n \in \mathbf{Z}$ , atunci  $A_n \in G$ ,  $\forall n \in \mathbf{Z}$ .
- (2p) g) Să se demonstreze că mulțimea  $G$  este infinită.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x + 1$  și sirul  $(a_n)_{n \geq 2}$ ,

$$a_n = \frac{2^3 + 1}{2^3 - 1} \cdot \frac{3^3 + 1}{3^3 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1}.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $f(x+1) = x^2 + x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se arate că  $\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{f(x)}{f(x+1)}$ ,  $\forall x > 1$ .
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că
$$a_n = \frac{3n(n+1)}{2(n^2 + n + 1)}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$
- (2p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^n f(x) dx}{n^3}$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} a_n \right)^n$ .

**Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările**

**Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale**

### Varianta 028

#### Subiectul I

- a) Fie P mijlocul lui [MN]; atunci  $x_p = -\frac{1}{2}; y_p = \frac{3}{2}$
- b) Fie  $d_1 : 2x - y + 5 = 0$  și  $d_2 : 2x - y - 7 = 0$ ; evident  $m_1 = 2 = m_2 \Rightarrow d_1 \parallel d_2$
- c) Fie  $b = 3, c = 4, a = 5$  atunci  $h_a = \frac{2\sigma[ABC]}{a} = \frac{b \cdot c}{a} = \frac{12}{5}$
- d)  $z = 12 - 8i \Rightarrow \text{Real } z = 12$
- e)  $(1-i)^4 = 4i^2 = -4$
- f)  $3 \sin \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

#### Subiectul II

1.

- a)  $f(1) = 1 + 5 - 7 + 1 = 0$
- b) Probabilitatea ceruta este  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- c)  $T_4 = (-2) \cdot 3^3 = -54$
- d)  $\Delta_x = -7$  și solutiile sunt  $x_1 = \frac{1-7i}{4}; x_2 = \frac{1+7i}{4}$
- 3) Determinantul e nul având o coloană nulă

2.

- a)  $f'(x) = \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \frac{1}{4}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2x \cdot f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4} = 2$
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$  asimptotă orizontală catre  $+\infty$
- e)  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$  deoarece  $f$  este impară

#### Subiectul III

- a)  $I_2^2 = I_2 \Rightarrow I_2 \in G$
- b)  $P^2 = I_2$  și  $Q^2 = I_2 \Rightarrow P, Q \in G$
- c)  $\det P = -1$

d)  $P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

e)  $(P \cdot Q)^2 \neq I_2 \Rightarrow P \cdot Q \in G$

f)  $A_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow A_n \in G$

g) Aplic f) si obtin  $A_n \in G (\forall) n \in \mathbf{N}$

#### Subiectul IV

a)  $f'(x) = 2x - 1$

b)  $f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) + 1 = x^2 + x + 1 (\forall) x \in \mathbf{R}$

c)  $\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{f(x)}{f(x+1)} (\forall) x > 1$

d)  $a_2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 7} = \frac{9}{7}$  da; prespun  $a_n = \frac{3n(n+1)}{2(n^2 + n + 1)}$  și am  $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3 - 1} = \frac{3n(n+1)}{2(n^2 + n + 1)} \cdot \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3 - 1} = \frac{3(n+1)(n+2)}{2[(n+1)^2 + (n+1) + 1]}$  și propoziția este demonstrată

e)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n(n+1)}{2(n^2 + n + 1)} = \frac{3}{2}$

f)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^n f(x) dx}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^n}{n^3} = \frac{1}{3}$

g)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \cdot a_n \right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)-1}{n^2+n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n^2+n+1} - \frac{1}{n} \right)} = e^0 = 1$