

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta027

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi 6 și 8 .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(3, 3)$ și $C(4, 4)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3, 3)$ și $C(4, 4)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A(3, 3)$, $B(3, 2)$ și $C(4, 4)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $\frac{2+i}{i-2} = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + 4x - 10 = 0$.
- (3p) b) Să se calculeze $\frac{C_5^2}{C_5^3}$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația $\log_5(x+1) = \log_5(x^2 + x)$.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $10^x = 100$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n! \geq 20$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) d) Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Notăm cu F mulțimea funcțiilor $f : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbf{R}$, crescătoare, care verifică $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

- (4p) a) Să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, atunci $x+y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $g : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = tx$, cu $t \in [0, \infty)$ atunci $g \in F$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $f \in F$, atunci $f(0) = 0$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $f \in F$, atunci $f(n) = n \cdot f(1)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $f \in F$ și $a, b \in \mathbf{Z}$, atunci $f(a+b\sqrt{2}) = af(1) + bf(\sqrt{2})$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $f(1) = t \in \mathbf{R}$ și $f \in F$, atunci $t \geq 0$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $f \in F$ și $f(\sqrt{2}) = 0$, atunci $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_0(x) = e^{2x}$ și $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f_1(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f_0 .
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = 2^n e^{2x}$,
 $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se calculeze $f_0(0) + f_1(0) + \dots + f_n(0)$, $n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{f_{n+1}(x)}$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_n(t) dt}{f_n(x)}$, $n \in \mathbf{N}$.
- (2p) g) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f_0(x) + f_1(x) = 3$.

Varianta 027

Subiectul I

- a) Ipotenuza este 10
- b) $AC = \sqrt{2}$
- c) $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- d) Se obține soluția $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$
- e) Aria cerută este $\frac{1}{2}$
- f) $\frac{2+i}{i-2} = -\frac{3}{5} - \frac{2}{5}i$; deci $a = -\frac{3}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$

Subiectul II

1. a) Suma este -4
- b) $\frac{C_5^2}{C_5^3} = \frac{C_5^2}{C_5^2} = 1$
- c) Rezultă $x+1 = x^2+x$ cu $x = \pm 1$ și convine numai $x = 1$
- d) $10^x = 100 \Leftrightarrow 10^x = 10^2 \Leftrightarrow x = 2$
- e) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$
2. a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
- b) $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \ln 2$
- c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ și cum $f'(x) < 0$, $(\forall)x < 0$ și $f'(x) > 0$, $(\forall)x > 0$ rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$, adică $f(x) \geq f(0)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$
- d) Din c) $x = 0$ este punct de minim și $f(0) = 0$; deci coordonatele sunt $(0,0)$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$

Subiectul III

- a) Fie $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \Rightarrow x = a + b\sqrt{2}, y = a' + b'\sqrt{2}$ cu $a, a', b, b' \in \mathbf{Z}$;
 am $x + y = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$
- b) Evident f crescătoare și $f(x + y) = f(x) + f(y)$, (\forall) $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ și
 cum $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ fac $x = y = 0$ și obțin $2f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$
- c) Inducție după $n \in \mathbf{N}$ (cu observația că dacă $n \in \mathbf{N}$ atunci $n = n + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$)
 Pentru $n = 0$ $f(0) = 0 \cdot f(1) = 0$, da – aplicând c)
 Presupun $f(n) = n \cdot f(1)$ și am
 $f(n+1) = f(n) + f(1) = n \cdot f(1) + f(1) = (n+1) \cdot f(1)$ și afirmația e demonstrată.
 Fie $x = a \in \mathbf{Z}$ și $y = b\sqrt{2}$ cu $b \in \mathbf{Z} \Rightarrow x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$
- d) Evident $f(a) = a \cdot f(1)$ pentru $a \in \mathbf{N}$ și cum f impară, dacă $a \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N} \Rightarrow a = -n$ cu
 $n \in \mathbf{N}^*$ și am $f(a) = f(-n) = -f(n) = -n \cdot f(1) = a \cdot f(1)$. Deci
 $f(a) = a \cdot f(1)$, (\forall) $a \in \mathbf{Z}$. Analog $f(b\sqrt{2}) = b \cdot f(\sqrt{2})$, (\forall) $b \in \mathbf{Z}$. Atunci
 $f(a + b\sqrt{2}) = f(a) + f(b\sqrt{2}) = a \cdot f(1) + b \cdot f(\sqrt{2})$
- e) Dacă $f(1) = t \in \mathbf{R}$ și $f \in F$, aplicând d) $f(n) = t \cdot n$, (\forall) $n \in \mathbf{N}$ și
 cum f crescătoare $\Rightarrow t \geq 0$
- g) Fie $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$;
 $f(x) = f(a + b\sqrt{2}) = a \cdot f(1) + b \cdot f(\sqrt{2}) = a \cdot f(1)$, (\forall) $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ și cum f este
 crescătoare rezultă că $f(1) = 0$ adică $f(x) = 0$, (\forall) $x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

Subiectul IV

- a) $f_1(x) = f_0'(x) = 2e^{2x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală pentru f_0 către $-\infty$
- c) Pentru $n = 0$ $f_0(x) = 2^0 \cdot e^{2x} = e^{2x}$, da.
 Presupun $f_n(x) = 2^n \cdot e^{2x}$ și am $f_{n+1}(x) = f_n'(x) = (2^n \cdot e^{2x})' = 2^{n+1} \cdot e^{2x}$.
 Deci $f_n(x) = 2^n \cdot e^{2x}$, (\forall) $x \in \mathbf{R}$ și (\forall) $n \in \mathbf{N}$
- d) $\sum_{k=0}^n f_k(0) = \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 2$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f_k(x)}{f_{n+1}(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 2}{2^n} = 1$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_n(t) dt}{f_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_{n+1}'(t) dt}{f_n(x)} = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{2x}} = 2$
- g) $f_0(x) + f_1(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} + e^0 = 3 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow x = 0$.