

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta026

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(13, 2)$ la punctul $B(11, 3)$.
- (4p) b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(-4 + 3i)(-1 + 2i) = a + bi$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6 .
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex $-2i - 3$.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(13, 2)$ și $B(11, 3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC , $AB = 12$, $AC = 5$ și $\hat{m}(BAC) = 90^\circ$, să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 50 & -3 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $(n!)^2 \leq 250$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale , ecuația $125^x - 5 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive , ecuația $\log_5 x = 1$.
- (3p) e) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^6 + 1$ la polinomul $g = X^3 + 1$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 12 + \frac{1}{x^{12}}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^{12} + 1) \cdot f(n))$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 026

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $A = \{3^i \cdot 5^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $1 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$ și $9 \in A$.
- (4p) b) Să se verifice că $2 \notin A$ și $7 \notin A$.
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, $\forall a \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (2p) d) Să se arate că $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^k} < \frac{3}{2}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- (2p) e) Să se arate că $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^s} < \frac{5}{4}$, $\forall s \in \mathbb{N}$.
- (2p) f) Să se calculeze numărul de elemente din mulțimea $A \cap \{1, 2, 3, \dots, 20\}$.
- (2p) g) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi numerele naturale distincte $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, avem $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{15}{8}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x$ și

$$g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{-x}{1+x}$ și $g'(x) = \frac{x^2}{1+x}$, $\forall x > -1$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(0)$ și $g'(0)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) \leq 0 \leq g(x)$, $\forall x \geq 0$.
- (2p) d) Să se arate că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice să se arate că $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3+5+\dots+(2n-1))n}{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}$.
- (2p) g) Să se arate că $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 \ln(1+x) dx \leq \frac{1}{2}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 026

Varianta 026

Subiectul I

a) $AB = \sqrt{3}$

b) Înmulțind în membrul stâng obțin: $4 - 8i - 3i + 6i^2 = a + bi \Leftrightarrow -2 - 11i = a + bi \Leftrightarrow a = -2$
și $b = -11$

c) Aria cerută este $\frac{36\sqrt{3}}{4}$

d) Conjugatul lui $z = -2i - 3$ este $\bar{z} = 2i - 3$

e) Se obține soluția $\begin{cases} a = 2 \\ b = -17 \end{cases}$

f) Aplicând teorema lui Pitagora obțin $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13$

Subiectul II

1.

a) Determinantul este 70

b) Deoarece numai 1, 2 și 3 verifică relația obțin că probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$

c) $125^x - 5 = 0 \Leftrightarrow 5^{3x} = 5^1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

d) $x = 5$

e) Câtul este $x^3 - 1$ iar restul este 2

2.

a) $f'(x) = -\frac{12}{x^{13}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -12$

c) $x = 0$ deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

d) $\int_1^2 f(x) dx = \left(12x - \frac{x^{-11}}{11}\right) \Big|_1^2 = \frac{1}{11} (132 - \frac{1}{2^{11}})$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(x^{12} + 1)f(n)] = +\infty$

Subiectul III

a) $1 = 3^0 \cdot 5^0; 3 = 3^1 \cdot 5^0; 5 = 3^0 \cdot 5^1; 9 = 3^2 \cdot 5^0$

b) Presupun că $2 \in A \Rightarrow (\exists) i, j \in \mathbf{N}$ cu $2 = 3^i \cdot 5^j$ fals căci membrul stâng e par iar membrul drept impar; Pentru 7 obțin $7 = 3^i \cdot 5^j$ cu $i, j \in \mathbf{N}$. Dacă $i, j \in \{0\}$ evident fals, iar pentru $i, j \in \mathbf{N}^*$ fals deoarece 7 nu e multiplu de 3(sau 5)

c) Pentru $n = 0$ evident $1 = \frac{1-a}{1-a}$; presupun $1 + a + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ și am

$$1 + a + \dots + a^n + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

$$\text{d) Membrul stâng se scrie } \frac{1-\frac{1}{3^{k+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{k+1}}\right) < \frac{3}{2}$$

$$\text{e) Membrul stâng este } \frac{1-\frac{1}{5^{s+1}}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{s+1}}\right) < \frac{5}{4}$$

f) Evident $A \cap \{1,2,3,\dots,20\} = \{1,3,5,9,15\}$; Răspuns 5

$$\text{g) Folosind punctele d) si e) obțin că } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}\right) \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{5^k}\right) < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}; g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1}$

b) $f'(0) = 0; g'(0) = 0$

c) Fie $x \geq 0; f'(x) = \frac{-x}{x+1} \leq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și

$$f(x) \leq f(0) = 0 (\forall) x \geq 0; g'(x) = \frac{x^2}{x+1} \geq 0 (\forall) x \geq 0 \Rightarrow g$$
 este crescătoare pe

$$[0, +\infty) \Rightarrow g(x) \geq g(0) = 0 (\forall) x \geq 0$$

d) Membrul stâng e suma a n termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen 1 și rația 2,
adică $\frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$

e) Pentru $n=1$ evident; presupun $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ și am

$$1^2 + 2^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)[4(n+1)^2-1]}{3}$$

f) Înănd cont de d) și e) obțin că limita cerută este $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3n^3}{n(4n^2-1)} = \frac{3}{4}$

g) Din c) am $g(x) \geq 0 \Rightarrow \ln(x+1) \geq x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow \int_0^1 \ln(x+1) dx \geq \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$; și tot din c)

am $f(x) \leq 0 \Rightarrow \ln(x+1) \leq x \Rightarrow \int_0^1 \ln(x+1) dx \leq \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$