

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta025

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului AB , dacă $A(1,3)$ și $B(-5,-5)$.
- (4p) b) Să se determine aria triunghiului determinat de punctele $A(1,3), B(-5,-5), C(-2,-7)$.
- (4p) c) Să se arate că expresia $E = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$ nu depinde de x .
- (4p) d) Să se calculeze $\cos^2 x$, dacă $\sin x = \frac{3}{5}$.
- (2p) e) Să se determine aria unui dreptunghi având lungimea 6 și lățimea egală cu $\frac{2}{3}$ din lungime.
- (2p) f) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care punctul $A(1,3)$ aparține dreptei de ecuație $x + y + a = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine conjugatul numărului complex $(1+i)(2-2i)$.
- (3p) b) Să se calculeze C_7^6 .
- (3p) c) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $3^{x^2} = 81$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $\log_2(x-1) = 1$, $x > 1$.
- (3p) e) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât tripletul $x, x+2, x+3$ să formeze o progresie geometrică.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 2^x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se arate că $f(x)$ este crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 3x^2 dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$.

- (4p) a) Să se calculeze $\det(A(x))$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se demonstreze că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- (2p) d) Să se arate că $A(x) \cdot A(-x) = I_2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că mulțimea G , împreună cu operația de înmulțire a matricelor, formează o structură de grup comutativ.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $(A(1))^n = A(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se determine $t \in \mathbf{R}$ pentru care $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2007) = A(t)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $[1, +\infty)$.
- (4p) c) Să se rezolve, în \mathbf{R} , ecuația $f(x) = 1$.
- (2p) d) Să se arate că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se determine ecuația asymptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$.
- (2p) g) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx$.

Varianta 25

Subiectul I

- a) $AB = 10$.
- b) $S_{ABC} = 18$.
- c) $E = 2$.
- d) $\cos^2 x = \frac{16}{25}$.
- e) $S = 24$.
- f) $a = -4$.

Subiectul II

1.

- a) $\bar{z} = 4$.
- b) $C_7^6 = 7$.
- c) $x \in \{-2, 2\}$.
- d) $x = 3$.
- e) $x = -4$.

2.

- a) $f'(x) = 1 + 2^x \ln 2$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 + 2 \ln 2$.
- c) Din $f'(x) = 1 + 2^x \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- e) $\int_1^2 3x^2 dx = 7$.

Subiectul III

- a) $\det(A(x)) = 1$.
- b) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y), \forall x, y \in \mathbf{R}$.
- c) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(0) \in G$.
- d) $A(x) \cdot A(-x) \stackrel{b)}{=} A(x + (-x)) = A(0) = I_2$.

e) Din punctul **b)** rezultă că mulțimea G este stabilă față de înmulțirea matricelor și că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$; înmulțirea matricelor de ordinul doi este asociativă; $I_2 \in G$ și $A(x) \cdot I_2 = I_2 \cdot A(x) = A(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci I_2 este elementul neutru; Din punctul **d)**, deducem că $\forall x \in \mathbf{R}$, $A(x)$ este inversabilă și inversa este $A(-x) \in G$, ($-x \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}$). În concluzie mulțimea G împreună cu operația de înmulțirea a matricelor formează structura de grup comutativ.

f) Pentru $n = 1$, evident $(A(1))^1 = A(1)$. Presupunem adevărat că $(A(1))^k = A(k)$, $k \in \mathbf{N}^*$ și demonstrăm că $(A(1))^{k+1} = A(k+1)$.

Dar $(A(1))^{k+1} = (A(1))^k \cdot A(1) = A(k) \cdot A(1) = A(k+1)$, deci $(A(1))^n = A(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2007) = A(1+2+\dots+2007) = A(1004 \cdot 2007)$, deci $t = 1004 \cdot 2007 = 2015028$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x+2)}{(x^2+2)^2}, x \in \mathbf{R}$.

b) $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x+2)}{(x^2+2)^2} \leq 0, \forall x \in [1, \infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe $[1, +\infty)$.

c) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2+2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$, deci $x = 1$.

d) $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq f(x) \\ f(x) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 2 \leq 4x + 2 \\ 2x + 1 \leq x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 \geq 0 \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{cases}$, adevărat

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2+2} = 0$, deci ecuația asymptotei către $+\infty$ la graficul funcției f este $y = 0$.

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+x}{x^2+2} = 2$.

g) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2} dx = \ln(x^2+2) \Big|_0^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$.