

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**

 Proba scrisă la **MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
**Varianta ...024**

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică: profil Uman, specializarea științe sociale; Filiera vocațională: profil Militar, specializarea științe sociale

**NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$  astfel încât punctele  $A(1, -2)$  și  $B(2, 1)$  să fie pe dreapta de ecuație  $x + ay + b = 0$ .
- (4p) b) Să se rezolve, în mulțimea numerelor complexe, ecuația  $z^2 + 1 = 0$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4}$ .
- (4p) d) Să se calculeze conjugatul numărului complex  $z = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i$
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$ .
- (2p) f) Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$  în care  $BC = 2, AB = 4$  și  $m(\hat{B}) = 30^\circ$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se determine valorile parametrului real  $m$  pentru care  $x^2 + mx + 9 > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se determine  $a \in (0, \infty)$  pentru care  $\log_3 2 + \log_3 a = 1$ .
- (3p) c) Să se determine  $b \in \mathbf{R}$  pentru care  $9^b = 27$ .
- (3p) d) Să se calculeze câte numere de 2 cifre încep și se termină cu o cifră impară.
- (3p) e) Să se determine termenul al șaselea al dezvoltării  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^9$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + \ln x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x), x \in (0, \infty)$ .
- (3p) b) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $(0, \infty)$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n+1) - f(n)]$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$ .

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică: profil Uman, specializarea științe sociale; Filiera vocațională: profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și polinomul

$$f = X^2 - 10X + 16.$$

- (4p) a) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația  $f(x) = 0$ .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- (4p) c) Să se calculeze matricea  $A^2$ .
- (2p) d) Să se calculeze suma și produsul rădăcinilor polinomului  $f$ .
- (2p) e) Să se verifice că  $f(A) = O_2$ . ( Prin  $f(A)$  înțelegem matricea  $A^2 - 10A + 16I_2$  ).
- (2p) f) Să se rezolve sistemul  $\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$ , unde  $x, y \in \mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se arate că  $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8^n + 2^n & 8^n - 2^n \\ 8^n - 2^n & 8^n + 2^n \end{pmatrix}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că funcția  $f'$  este crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$  și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ .
- (2p) d) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x(e^x - 1)}$ .
- (2p) f) Să se arate că  $f(x) \geq 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se determine  $x, y \in \mathbf{R}$  astfel încât  $f(x) + f(y) = 2$ .

## Varianta 24

### Subiectul I

- a)  $a = \frac{-1}{3}, b = \frac{-5}{3}$ .
- b)  $z_1 = i, z_2 = -i$ .
- c)  $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = 0$ .
- d)  $\bar{z} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$ .
- e)  $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- f)  $S_{ABC} = 2$ .

### Subiectul II

1.

- a)  $m \in (-6, 6)$ .
- b)  $a = \frac{3}{2}$ .
- c)  $b = \frac{3}{2}$ .
- d) Avem  $5 \cdot 5 = 25$  posibilități.
- e)  $T_6 = 4536\sqrt{3}$ .

2.

- a)  $f'(x) = \frac{x+1}{x}$ .
- b) Obținem că  $f'(x) = \frac{x+1}{x} > 0, \forall x \in (0, \infty)$ , deci funcția  $f$  este crescătoare pe  $(0, \infty)$ .
- c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n+1) - f(n)] = 1$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$ .
- e)  $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = e - \frac{1}{2}$ .

### Subiectul III

- a) Obținem  $x_1 = 8$  și  $x_2 = 2$ .

- b)  $\det A = 16$ .
- c)  $A^2 = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$ .
- d)  $x_1 + x_2 = 10$  și  $x_1 x_2 = 16$ .
- e) Prin calcul direct se obține  $f(A) = O_2$ .
- f) Sistemul este sistem omogen și are numai soluția banală:  $x = 0, y = 0$ .
- g) Vom demonstra prin inducție.

Pentru  $n = 2$  se verifică.

Presupunând adevărat că  $A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8^k + 2^k & 8^k - 2^k \\ 8^k - 2^k & 8^k + 2^k \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbf{N}, k \geq 2$ ; demonstrăm

că  $A^{k+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8^{k+1} + 2^{k+1} & 8^{k+1} - 2^{k+1} \\ 8^{k+1} - 2^{k+1} & 8^{k+1} + 2^{k+1} \end{pmatrix}$ .

$$\text{Dar } A^{k+1} = A^k \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8^k + 2^k & 8^k - 2^k \\ 8^k - 2^k & 8^k + 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8^{k+1} + 2^{k+1} & 8^{k+1} - 2^{k+1} \\ 8^{k+1} - 2^{k+1} & 8^{k+1} + 2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Ambele etape ale inducției fiind verificate, deducem că  $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8^n + 2^n & 8^n - 2^n \\ 8^n - 2^n & 8^n + 2^n \end{pmatrix}$ ,

$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ .

#### Subiectul IV

- a)  $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$ .
- b)  $f''(x) = 12x^2 + 6x + 2 = 2(6x^2 + 3x + 1)$ . Cum  $6x^2 + 3x + 1 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$  și prin urmare funcția  $f'$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x^3 = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 = -\infty$ .
- d)  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^4 + x^3 + x^2 + 1) dx = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{107}{60}$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} (x^2 + x + 1) = 1 \cdot 1 = 1$ .
- f) Am arătat la punctul b) că funcția  $f'$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ . Atunci dacă  $x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$  și dacă  $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$ . Rezultă  $x = 0$  este punct de minim local. Deci  $f(x) \geq f(0) = 1, \forall x \in \mathbf{R}$ .
- g) Din punctul f) rezultă că  $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbf{R}$  și  $f(y) \geq 1, \forall y \in \mathbf{R}$ . Însușind cele două relații rezultă că  $f(x) + f(y) \geq 2$  cu egalitate dacă  $f(x) = f(y) = 1$ . Obținem  $x = y = 0$ .