

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianța023

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, -4)$, $B(1, 2)$ și $C(-2, 1)$.

- (4p) a) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului (AB) .
- (4p) b) Să se calculeze partea reală a numărului complex $(3 + 3i)^2$.
- (4p) c) Să se calculeze conjugatul numărului complex $z = (1 - 2i)^2$.
- (4p) d) Să se calculeze $\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$.
- (2p) e) Să se calculeze lungimea medianei din C a triunghiului ABC .
- (2p) f) Să se calculeze coordonatele punctului de intersecție al dreptelor de ecuații $x + y - 1 = 0$ și $x - y + 1 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine al șaselea termen al progresiei aritmetice $2, 4, 6, \dots$
- (3p) b) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} x & 0 \\ 8 & x+1 \end{vmatrix} = 0$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se afle câte numere distincte de forma \overline{abc} există, pentru care $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$.
- (3p) d) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Să se calculeze $f(f(1))$.
- (3p) e) Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^3 + X^2 + X$. Să se calculeze $f(i)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x - x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in (0, \infty)$.
- (3p) b) Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției f .
- (3p) c) Să se arate că f este descrescătoare pe intervalul $(1, \infty)$.
- (3p) d) Să se arate că dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(n)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Pe \mathbf{R} definim legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$. Se consideră $G = (-2, +\infty)$.

- (4p) a) Să se arate că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $x, y \in G$, atunci $x \circ y \in G$.
- (4p) c) Să se demonstreze că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in G$.
- (2p) d) Să se arate că există $e \in G$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in G$.
- (2p) e) Să se rezolve ecuația $0 \circ x \circ 0 = 0$, $x \in G$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că

$$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x+2)^n - 2, \quad \forall x \in G, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$
.
- (2p) g) Să se calculeze $\underbrace{0 \circ 0 \circ \dots \circ 0}_{\text{de 2007 ori}}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{e-1}{e^{x+1}}$ și sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x+1}}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (4p) c) Să se arate că $f'(x) = -f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $a_n = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right)$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) f) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele verticale de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n f(x) dx + a_n \right)$.

Varianta 23

Subiectul I

- a) Dacă punctul M este mijlocul segmentului $[AB]$ atunci $M(2, -1)$.
- b) $\operatorname{Re}(z) = 0$.
- c) $\bar{z} = -3 + 4i$.
- d) $\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0$.
- e) Mediana este CM , $CM = 2\sqrt{5}$.
- f) $E(0,1)$.

Subiectul II

1.

- a) $a_6 = 12$.
- b) $x_1 = 0, x_2 = -1$.
- c) Avem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ posibilități.
- d) $f(f(1)) = f(1) = 1$.
- e) $f(i) = -1$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{1-x}{x}, x > 0$.
- b) $A(1, -1)$ este punctul de extrem local al graficului funcției f .
- c) $f'(x) < 0, \forall x \in (1, \infty)$, deci f este strict descrescătoare pe $(1, \infty)$.
- d) $x = 0$ este asymptotă verticală la graficul funcției f .
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(n) = -1$.

Subiectul III

- a) $(x+2)(y+2) - 2 = xy + 2x + 2y + 2 = x \circ y, \forall x, y \in \mathbf{R}$.
- b) Din $x \in G, y \in G$ rezultă $x+2 > 0, y+2 > 0$ deci $(x+2)(y+2) > 0$ atunci $(x+2)(y+2) - 2 > -2$ adică $x \circ y > -2 \Rightarrow x \circ y \in G$.
- c) Prin calcul se arată că $(x \circ y) \circ z = xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 4y + 4z + 6 = x \circ (y \circ z)$.
- d) $x \circ e = x, \forall x \in (-2, \infty) \Leftrightarrow x(e+2) + 2e + 2 = x, \forall x \in (-2, \infty)$. Identificând coeficienții obținem $e+2=1$ și $2e+2=0 \Rightarrow e=-1 \in G$. Se verifică că $-1 \circ x = x, \forall x \in G$.
- e) $(2x+4)(0+2) - 2 = 0; 4x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \in G$.

f) Notăm $P(n): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} = (x+2)^n - 2, n \in \mathbf{N}^*$.

$P(1)$ este adevărată. Presupunem $P(k)$ ca fiind o propoziție adevărată, demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$$\begin{aligned} \text{Din } & \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{k+1 \text{ ori}} = \left(\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} \right) \circ x = ((x+2)^k - 2) \circ x = \\ & = ((x+2)^k - 2 + 2)(x+2) - 2 = (x+2)^{k+1} - 2 \Rightarrow P(k+1) \text{ este propoziție adevărată. Pe} \\ & \text{bază metodei inducției matematice rezultă că } P(n) \text{ este adevărată, } \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

g) Din f) pentru $n = 2007$ și $x = 0$ obținem $\underbrace{0 \circ 0 \circ \dots \circ 0}_{2007 \text{ ori}} = 2^{2007} - 2$.

Subiectul IV

a) $f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x+1}}$.

b) $y = 0$ este ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .

c) $f'(x) = -\frac{e-1}{e^{x+1}} = -f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

d) $a_n = \sum_{k=1}^n f(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{e^k} - \frac{1}{e^{k+1}} \right) =$
 $= \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^n} \right) - \left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \dots + \frac{1}{e^n} + \frac{1}{e^{n+1}} \right) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right).$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right) = \frac{1}{e}$.

f) $S_f = \int_0^1 \frac{e-1}{e^{x+1}} dx = \frac{e-1}{e} \cdot \int_0^1 e^{-x} dx = \left(\frac{e-1}{e} \right)^2$.

g) $\int_0^n f(x) dx = \frac{e-1}{e} \int_0^n e^{-x} dx = \frac{e-1}{e} \cdot \frac{e^n - 1}{e^n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n f(x) dx + a_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e-1}{e} \cdot \frac{e^n - 1}{e^n} + \frac{1}{e} \cdot \frac{e^n - 1}{e^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n - 1}{e^n} = 1.$$