

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
***Varianta ....022***

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**NOTĂ.**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine conjugatul numărului complex  $z = 2007i$ .
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ , cu  $A(6, 0)$ ,  $B(0, 8)$  și  $C(6, 8)$ .
- (4p) c) Să se determine numerele  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât punctele  $A(6, 0)$  și  $B(0, 8)$  să fie situate pe dreapta de ecuație  $x + ay + b = 0$ .
- (4p) d) Să se calculeze partea reală a numărului complex  $(2 - 3i)(1 + i)$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ .
- (2p) f) Se consideră triunghiul  $MNP$ , cu  $MN = 5$ ,  $NP = 6$  și  $PM = 7$ . Să se calculeze  $\cos M$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se găsească soluțiile reale ale ecuației  $3^{x^2+x} = 9$ .
- (3p) b) Să se afle în câte moduri putem permuta elementele mulțimii  $\{-1, 0, 1\}$ .
- (3p) c) Să se calculeze numărul  $\log_2 3 + \log_2 \frac{8}{3}$ .
- (3p) d) Să se calculeze numărul  $C_4^3 - A_3^1$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii  $\{-3, 1, 4, 6\}$  să fie impar.

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^{2007} + x$ .

- (3p) a) Să se arate că  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea de matrice  $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix} \middle| x > 0, A(x) \in M_2(\mathbf{R}) \right\}$  și

$$\text{matricea } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se arate că  $I_2 \in M$ .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei  $A(2)$ .
- (4p) c) Să se demonstreze că  $A(x) \cdot A(y) = A(x \cdot y)$ ,  $\forall A(x), A(y) \in M$ .
- (2p) d) Să se arate că dacă pentru  $x, y \in (0, \infty)$ , avem  $A(x) = A(y)$ , atunci  $x = y$ .
- (2p) e) Să se arate că există  $A(e) \in M$ , astfel încât  $A(x) \cdot A(e) = A(x)$ ,  $\forall A(x) \in M$ .
- (2p) f) Să se demonstreze că pentru orice  $A(x) \in M$ , există  $A(x') \in M$  astfel încât  $A(x) \cdot A(x') = A(1)$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $A(2) + A^2(2) + A^3(2) + \dots + A^n(2)$ , pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , cu  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  și  $g(x) = \ln(1+x^2)$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f(0)$  și  $g(0)$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se arate că  $g'(x) = 2f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se găsească ecuația asimptotei spre  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (2p) e) Să se determine coordonatele punctelor de extrem local ale funcției  $f$ .
- (2p) f) Să se demonstreze că pentru orice  $x \leq 0$ , avem  $f(x) \leq 0$  și  $g(x) \geq 0$ .
- (2p) g) Utilizând eventual rezultatul de la punctul f), să se demonstreze că  $\frac{x}{1+x^2} \leq \ln(1+x^2)$ ,  $\forall x \leq 0$ .

## Varianta 22

### Subiectul I

- a)  $\bar{z} = -2007i$ .
- b)  $S_{ABC} = 24$ .
- c)  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = -6$ .
- d)  $\operatorname{Re}(z) = 5$ .
- e)  $\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- f)  $\cos M = \frac{19}{35}$ .

### SUBIECTUL II

**1.**

- a)  $x_1 = 1$  și  $x_2 = -2$ .
- b)  $P_3 = 3! = 6$ .
- c)  $\log_2 3 + \log_2 \frac{8}{3} = 3$ .
- d)  $C_4^3 - A_3^1 = 1$ .
- e)  $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

**2.**

- a)  $f(-x) = -f(x)$ .
- b)  $f'(x) = 2007x^{2006} + 1$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ .
- d) Din b) rezultă că  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$  funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- e)  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ .

### Subiectul III

- a)  $I_2 = A(1), 1 > 0$ . Deci  $I_2 \in M$ .
- b)  $\det(A(2)) = 2$ .
- c)  $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xy - 1 & xy \end{pmatrix} = A(xy)$ .

- d)**  $A(x) = A(y) \Rightarrow x - 1 = y - 1$  și  $x = y$ . Deci  $x = y$ .
- e)**  $A(x) \cdot A(e) = A(x)$ . Din **c)** rezultă  $A(xe) = A(x)$ . Folosind **d)** rezultă  $xe = x, \forall x > 0$ . Obținem  $e = 1 > 0$ . Deci  $A(e) = A(1) \in M$ .
- f)**  $A(x) \cdot A(x') = A(1)$ . Din **c)** rezultă  $A(xx') = A(1)$ . Folosind **d)** rezultă  $xx' = 1$ . Cum  $x > 0$ , obținem că există  $x' = \frac{1}{x} > 0$ . Deci  $A(x') = A\left(\frac{1}{x}\right) \in M$ .

**g)** Din punctul **c)** rezultă că  $A^2(x) = A(x^2)$ . Prin inducție matematică se arată că

$$A^n(x) = A(x^n), (\forall)n \in \mathbb{N}^*. Atunci A^n(2) = A(2^n). Obținem \sum_{k=1}^n A^k(2) = \sum_{k=1}^n A(2^k) = \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^k - 1 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 2^{n+1} - 2 - n & 2^{n+1} - 2 \end{pmatrix}.$$

#### Subiectul IV

- a)**  $f(0) = 0$  și  $g(0) = 0$ .
- b)**  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \forall x \in \mathbf{R}$ .
- c)**  $g'(x) = 2f(x), \forall x \in \mathbf{R}$ .
- d)**  $y = 0$  este asimptota spre  $-\infty$ .
- e)**  $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ . Din tabelul de variație obținem punctele de extrem local de coordonate  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$  și  $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ .
- f)** Dacă  $x \leq 0$  atunci  $\frac{x}{1+x^2} \leq 0$ , deci  $f(x) \leq 0, \forall x \leq 0$ .
- $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x^2) \geq \ln 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$  adevărat,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- g)** Din  $f(x) \leq 0 \leq g(x), \forall x \leq 0$  obținem  $f(x) \leq g(x), \forall x \leq 0$ , adică
- $$\frac{x}{1+x^2} \leq \ln(1+x^2), \forall x \leq 0.$$