

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianța021

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex $(\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(4,5)$ la punctul $E(6,7)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos x$, dacă $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(1, 2)$, $M(2, 3)$ și $N(3, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze perimetru unui pătrat cu aria 100 .
- (2p) f) Să se determine ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu catetele 5 și 12.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se verifice identitatea $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, $\forall x > 0$
- (3p) b) Să se arate că $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} < 1$
- (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $\frac{2}{2x-1} \in \mathbf{Z}$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} + 3^x = 12$.
- (3p) e) Să se calculeze produsul rădăcinilor complexe ale polinomului $f = X^4 - X^2 - 20$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 2^{-x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se rezolve ecuația $f(x) = 2^{-2x} + x$, $x \in \mathbf{R}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numările complexe $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\bar{\omega} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ și multimile

$$\mathbf{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbf{Z}\} \text{ și } H = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^5\}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $\omega^2 = \omega - 1$.
- (4p) b) Să se arate că $\omega^3 = -1$ și $\omega^6 = 1$.
- (4p) c) Să se calculeze $\omega + \bar{\omega}$ și $\omega \cdot \bar{\omega}$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $n \in \mathbf{N}^*$ și $\omega^n = 1$, atunci 6 divide pe n .
- (2p) e) Să se arate că, dacă $u, v \in \mathbf{Z}[\omega]$, atunci $u + v \in \mathbf{Z}[\omega]$ și $u \cdot v \in \mathbf{Z}[\omega]$.
- (2p) f) Să se arate că $H \subset \mathbf{Z}[\omega]$.
- (2p) g) Să se arate că multimea $\{z \in \mathbf{Z}[\omega] \mid \exists y \in \mathbf{Z}[\omega], \text{ astfel încât } y \cdot z = 1\}$ conține cel puțin 6 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1+x^2)$ și $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- (4p) a) Să se arate că $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.
- (2p) f) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă către $+\infty$.
- (2p) g) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f(x) + f(2x) = 0$.

Varianta 021

Subiectul I

a) Dacă $z = (\sqrt{2} + i\sqrt{3})^2$ atunci $\bar{z} = (\sqrt{2} - i\sqrt{3})^2$

b) $DE = 2\sqrt{2}$

c) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ și cum $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ iar $\cos x > 0$ obțin $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L, M, N$ coliniare

e) Dacă aria pătratului este 100 atunci latura e 10 iar perimetru 40.

f) Aplicând teorema lui Pitagora obțin că ipotenuza este $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

Subiectul II

1.a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

b) Folosind a) obțin $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ și aşa mai departe $\frac{1}{1 \cdot 9} = \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$;

însumând obțin:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} = 1 - \frac{1}{10} < 1$$

c) Observând că numai 1 verifică relația obțin că probabilitatea cerută este $\frac{1}{5}$.

d) $3^{x+1} + 3^x = 12 \Leftrightarrow 3^x(3+1) = 12 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

e) Aplicând relațiile lui Viette obțin că produsul cerut este -24.

2. a) $f'(x) = 1 - 2^{-x} \ln 2$

b) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2^{-x}) dx = \frac{1 + \ln 2}{2 \ln 2}$

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^x} = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow 2^x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \log_2 \ln 2$

care este punct de minim deoarece în stânga sa $f'(x) < 0$ și în dreapta sa $f'(x) > 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{2 - \ln 2}{2}$

e) Ecuația devine $2^{-x} = 2^{-2x} \Leftrightarrow x = 0$

Subiectul III

a) $\omega^2 = \frac{-1 - 3 + 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $\omega - 1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1 + i\sqrt{3} - 2}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ de

unde egalitatea $\omega^2 = \omega - 1$

b) $\omega^3 = \omega \cdot \omega^2 = \omega \cdot (\omega - 1) = \omega^2 - \omega = \omega - 1 - \omega = -1$.

$\omega^6 = (\omega^3)^2 = (-1)^2 = 1$

c) $\omega + \bar{\omega} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = 1$

$$\omega \cdot \bar{\omega} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{1+3}{4} = 1$$

d) Fie $\omega^n = 1$ cu $n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $n=6p+k$ cu $p \in \mathbf{N}^*$ și $k = \overline{0,5}$ și

$\omega^n = 1 \Leftrightarrow \omega^{6p+k} = 1 \Leftrightarrow 1^p \cdot \omega^k = 1 \Leftrightarrow \omega^k = 1$. Cum $k = \overline{0,5}$ convine numai $k=0$ căci $\omega^2 = \omega - 1 \neq 1$, $\omega^3 = -1 \neq 1$, $\omega^4 = -\omega \neq 1$, $\omega^5 = \omega^4 \cdot \omega = -\omega^2 = 1 - \omega \neq 1$.

Asadar $n=6p$ cu $p \in \mathbf{N}^*$ adică 6 divide n.

e) Fie $n, v \in \mathbf{Z}[\omega] \Rightarrow (\exists) a, b, a', b' \in \mathbf{Z}$ cu $u=a+b\omega$ și $v=a'+b'\omega$. Am

$$u+v=(a+a')+(b+b')\omega \in \mathbf{Z}[\omega] \text{ și}$$

$$u \cdot v = a \cdot a' + b \cdot b' \omega^2 + (a \cdot b' + a' \cdot b) \omega = a \cdot a' + b \cdot b'(\omega - 1) + (ab' + a'b) \omega = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b + b \cdot b') \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$$

f) $1 = 1 + 0 \cdot \omega$; $\omega = 0 + 1 \cdot \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$, $\omega^2 = -1 + \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$, $\omega^3 = -1 + 0 \cdot \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$,

$\omega^4 = -\omega = 0 - \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$, $\omega^5 = \omega^4 \cdot \omega = 1 - \omega \in \mathbf{Z}[\omega]$. Adică $H \subset \mathbf{Z}[\omega]$.

g) Notez $A = \{z \in \mathbf{Z}[\omega] \mid (\exists) y \in \mathbf{Z}[\omega] \text{ astfel încât } y \cdot z = 1\}$ și înând cont de f) și de faptul că

$1 \cdot 1 = 1$ și ca $\omega^6 = 1$ rezultă că A conține cel puțin H care are 6 elemente.

Subiectul IV

a) $f'(x) = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2} = g(x)$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ și cum $f'(x) < 0 \quad (\forall) x < 0$ și $f'(x) > 0 \quad (\forall) x > 0$ rezultă că f e strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

c) Deoarece $f(0) = 0$ și $f(x) \geq f(0)$ obțin $f(x) \geq 0 \quad (\forall) x \in \mathbf{R}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$

e) $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$.

f) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

Deci f nu are asymptote către $+\infty$

g) $f(x) + f(2x) = 0 \Leftrightarrow (1+x^2) \cdot (1+4x^2) = 1$

notez $x^2 = y \geq 0$ și obțin $(1+y) \cdot (1+4y) = 1 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.