

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta020

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $O(0,0)$.

- (4p) a) Să se verifice că punctele A_0 și A_1 sunt situate pe dreapta de ecuație $y = 1$.
- (4p) b) Să se arate că punctele A_0 , A_1 și A_2 sunt coliniare .
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1 .
- (4p) d) Să se calculeze lungimea segmentului $[OA_n]$, $n \in \mathbb{N}$.
- (2p) e) Să se determine numărul dreptelor care trec prin cel puțin 2 puncte din mulțimea $\{O, A_0, A_1, \dots, A_{10}\}$.
- (2p) f) Să se determine numărul triunghiurilor care au vârfurile în câte 3 puncte din mulțimea $\{O, A_0, A_1, \dots, A_{10}\}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $\log_2 8 - \log_3 9 + \log_5 25$.
- (3p) b) Să se determine cel mai mare termen din sirul de numere $C_2^1, C_3^2, C_4^3, C_5^4, C_6^5$.
- (3p) c) Să se rezolve ecuația $5^x = \sqrt{5}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^4 + 1$ la polinomul $g = X + 1$.
- (3p) e) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 10$. Să se calculeze $(f \circ f)(1)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x$.

- (3p) a) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \cdot f'(x)}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in (0, \infty), b \in \mathbf{R} \right\}.$$

(4p) a) Să se arate că $I_2 \in G$.

(4p) b) Să se calculeze determinantul matricei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$.

(4p) c) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

(2p) d) Să se verifice că, dacă $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$, atunci matricea $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G$ și

$$C \cdot D = D \cdot C = I_2.$$

(2p) e) Să se găsească două matrice $U, V \in G$ pentru care $U \cdot V \neq V \cdot U$.

(2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall a, b, c \in \mathbf{R}.$$

(2p) g) Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe mulțimea G o structură de grup necomutativ.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x - 2^x$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(4p) c) Să se arate că $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \infty)$.

(2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, știind că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\forall a > 0$.

(2p) e) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

(2p) f) Să se arate că $\int_0^x a^t dt = \frac{a^x - 1}{\ln a}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$.

(2p) g) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

Varianta 020

Subiectul I

- a) $A_0(0,1)$ și $A_1(1,1)$ verifică ecuația $y = 1$ căci $0 \cdot 0 + 1 = 1$ și $0 \cdot 1 + 1 = 1$;
- b) Deoarece $A_2(2,1)$ se află și el pe dreapta $y = 1$ rezultă că A_0, A_1, A_2 sunt coliniare ;
- c) Aria sa este $\frac{OA_0 \cdot A_0A_1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$;
- d) $O(0,0)$ și $A_n(n,1) \Rightarrow OA_n = \sqrt{n^2 + 1}$;
- e) Evident $A_k(k,1), k = \overline{0,10}$ sunt coliniare pe dreapta $y = 1$ și cum O și $A_k(k,1), k = \overline{0,10}$ determină o dreaptă rezultă că numărul dreptelor cerute este 12 ;
- f) Deoarece A_i, A_j, A_k cu i, j, k distincte două câte două nu pot determina un triunghi (fiind coliniare) rezultă că singurele triunghiuri sunt de forma OA_iA_j cu $i \neq j, i, j = \overline{0,10}$ iar numărul lor este egal cu numărul submulțimilor de 2 elemente ale unei mulțimi de 11 elemente , adică $C_{11}^2 = 55$;

Subiectul II :

1.

- a) $\log_2 8 - \log_3 9 + \log_5 25 = 3$;
- b) Folosind formula combinărilor complementare obțin că cel mai mare termen 6, adică C_6^5 ;
- c) $5^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$;
- d) $f(-1) = (-1)^4 + 1 = 2$;
- e) $(f \circ f)(x) = x$ deci $(f \circ f)(1) = 1$;

2.

- a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 4) = 0$ cu singurele soluții reale $x = 0$ și $x = \sqrt[3]{4}$ (facem observația că $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ deci se caută numai soluții reale);
- b) $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$;
- c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$ cu singura soluție reală $x = 1$; observând că $f'(x) < 0, (\forall)x < 1$ și $f'(x) > 0, (\forall)x > 1$ obțin $x = 1$ punct de minim pentru f ;
- d) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^4 - 4x)dx = \left(\frac{x^5}{5} - 2x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - 2 = -\frac{9}{5}$;
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(1 - \frac{4}{x^3})}{x^4(4 - \frac{1}{x^3})} = \frac{1}{4}$;

Subiectul III:

a) Notând $a = c = 1$ și $b = 0$ obțin că $I_2 \in G$;

b) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac - 0 = ac$;

c) Fie $A, B \in G \Rightarrow (\exists) a, c, a', c' \in (0, \infty)$ și $b, b' \in \mathbf{R}$ cu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in G \text{ căci } a \cdot a' \text{ și } c \cdot c' \in (0, \infty) \text{ iar } ab' + bc' \in \mathbf{R}.$$

d) Fie $C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$; deoarece $\frac{1}{a}, \frac{1}{c} \in (0, \infty)$ și $-\frac{b}{ac} \in \mathbf{R}$ rezultă că $D \in G$;

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in G$ și am $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și evident

$$AB \neq BA;$$

f) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$;

-pentru $n = 1$ am $A^1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = A$;

-presupun că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ și am $A^{n+1} = A^n \cdot A =$

$$\begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & b(a^n + a^{n-1}c + \dots + ac^{n-1} + c^n) \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$$

g) Verificăm axiomele grupului; din c) rezultă că $A \cdot B \in G, (\forall) A, B \in G$ adică G e parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor; deci legea indușă pe G este și asociativă. În plus $I_2 \in G$ și $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A, (\forall) A \in G$ adică I_2 este elementul neutru.

Folosind punctul d) dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$ atunci $A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G$ și am

$A \cdot A' = A' \cdot A = I_2$, adică orice element din G este simetrizabil. În concluzie (G, \cdot) grup și cu punctul c) chiar necomutativ.

Subiectul IV:

a) $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2^x \ln 2$;

b); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3^x \ln 3 - 2^x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ cu unica soluție $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{\ln 2}{\ln 3}$;

observând că $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ e subunitar iar $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \log_{\frac{3}{2}} \frac{\ln 2}{\ln 3} < 0$ adică pe $[0, \infty)$, f' păstrează semn

constant; calculând $f'(1) > 0 \Rightarrow$ pe $[0, \infty)$ f este strict crescătoare și cum $f(0) = 0$ obțin $f(x) \geq 0, (\forall)x \geq 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} = \ln \frac{3}{2}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x - 2^x) = 0$;

f) $\int_0^x a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} \Big|_0^x = \frac{a^x - 1}{\ln a}$;

g) Observând că pe $[0,1]$ f e continuă și pozitivă am că aria cerută este $\int_0^1 f(x) dx =$

$$= \int_0^1 (3^x - 2^x) dx = \int_0^1 3^x dx - \int_0^1 2^x dx = \frac{2}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 2} \text{ (Am folosit f)}$$