

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianța019

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(1, 2)$ și $B(2, 1)$.
- (4p) b) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(1, 2)$ și $B(2, 1)$ să aparțină dreptei de ecuație $y = mx + n$.
- (4p) c) Să se arate că triunghiul cu vârfurile $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$ și $C(1, 0)$ este echilateral.
- (4p) d) Să se calculeze $2 \cdot \sin^2 45^\circ$.
- (2p) e) Să se calculeze numărul complex $(1-i)(1+i)$.
- (2p) f) Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° și lungimea ipotenuzei egală cu 2.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2$.
- (3p) b) Să se calculeze $5! - 3!$.
- (3p) c) Să se rezolve ecuația $3^x = \frac{1}{3}$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^5 + 1$ la polinomul $g = X - 2$.
- (3p) e) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 2$. Să se calculeze $(f \circ f)(1)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2$.

- (3p) a) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x \cdot f'(x)}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) \mid X(a) = I_2 + a \cdot A, a \in \mathbf{R}\}$.

- (4p) a) Să se calculeze A^2 .
- (4p) b) Să se arate că $I_2 \in G$.
- (4p) c) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se calculeze $X(2) \cdot X(-2)$.
- (2p) e) Să se calculeze $X(-2007) \cdot X(-2006) \cdot \dots \cdot X(0) \cdot X(1) \cdot \dots \cdot X(2007)$.
- (2p) f) Folosind metoda inducției matematice, să se arate că $(X(a))^n = X(na)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
 $\forall a \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $(X(a))^{2007} = X(1)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $F(x) = \ln(1+x^2)$ este o primitivă a funcției f .
- (2p) d) Să se arate că $-1 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x)$.
- (2p) f) Să se arate că $\int_a^b f(x) dx = \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt$.

Varianta 19

SUBIECTUL I

- a) $AB = \sqrt{2}$.
- b) $m = -1$ și $n = 3$.
- c) $AB = 2$, $BC = 2$ și $AC = 2$ deci ΔABC este echilateral.
- d) $2 \cdot \sin^2 45^\circ = 1$.
- e) $(1-i)(1+i) = 2$.
- f) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) 15.
- b) $5! - 3! = 114$.
- c) $x = -1$.
- d) Restul este $f(2) = 33$.
- e) $(f \circ f)(1) = -3$.

2.

- a) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -3$.
- b) $f'(x) = 3x^2 + 6x$.
- c) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ sunt punctele de extrem ale funcției f .
- d) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2}{3x^3 + 6x^2} = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL III

- a) $A^2 = O_2$.
- b) $I_2 = X(0) \in G \Rightarrow I_2 \in G$.
- c) $X(a) \cdot X(b) = I_2 + (a+b)A = X(a+b)$.
- d) Folosind c) avem că $X(2) \cdot X(-2) = X(0) = I_2$.
- e) Din c) $\Rightarrow X(a) \cdot X(b) = X(a+b) = X(b+a) = X(b) \cdot X(a)$ și
 $X(a)X(-a) = X(0) = I_2$. Atunci $X(-2007) \cdot X(-2006) \cdot \dots \cdot X(0) \cdot \dots \cdot X(2007) =$
 $(X(-2007) \cdot X(2007)) \cdot (X(-2006) \cdot X(2006)) \cdot \dots \cdot (X(-1) \cdot X(1)) \cdot X(0) = I_2$.
- f) Fie $P(n) : (X(a))^n = X(na)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(1) : X(a) = X(a)(A).$$

Presupunem $P(k)(A)$ și demonstrăm $P(k+1)(A)$, unde $k \geq 1$.

$$P(k) : (X(a))^k = X(ka), \text{ iar } P(k+1) : (X(a))^{k+1} = X((k+1)a).$$

$$\text{Dar } (X(a))^{k+1} = (X(a))^k \cdot X(a) = X(ka) \cdot X(a) = X((k+1)a)$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbf{g)} \quad (X(a))^{2007} = X(1) \stackrel{f}{\Leftrightarrow} X(2007a) = X(1) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2007}.$$

SUBIECTUL IV

$$\mathbf{a)} \quad f(1) = 1.$$

$$\mathbf{b)} \quad f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

c) F este o primitivă a funcției f dacă F este derivabilă (A) și $F'(x) = f(x)$

$$\text{Calculăm: } F'(x) = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2} = f(x).$$

$$\mathbf{d)} \quad -1 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq (x+1)^2 \\ 0 \leq (x-1)^2 \end{cases}, \text{ adevărat } \forall x \in \mathbb{R}..$$

$$\mathbf{e)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2.$$

$$\mathbf{f)} \quad \text{Folosind c)} \int_a^b f(x) dx = \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}.$$

$$\mathbf{g)} \quad \text{Folosind f)} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1. \text{ Unde am folosit limita}$$

$$\text{remarcabilă } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$