

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianța018

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex $1 + 7i$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(-1, -2)$ la dreapta $x + y - 4 = 0$.
- (4p) c) Să se calculeze valoarea expresiei $2\cos^2 \frac{\pi}{3} - 1$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(-1, 2)$, $M(-2, 3)$ și $N(-3, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu având lungimea laturii 8.
- (2p) f) Să se calculeze perimetrul pătratului cu aria 100.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze al patrulea termen al unei progresii geometrice cu primul termen 3 și rația 2.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $n + 9 < 3^n$.
- (3p) c) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 1$. Să se calculeze $(f \circ f)(-1)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale, ecuația $\log_2(x^2 + 7) = 3$.
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^2 - X - 24$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (3p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și polinomul

$$f = X^2 - 6X + 8.$$

- (4p) a) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $f(x) = 0$.
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei A .
- (4p) c) Să se calculeze matricea A^2 .
- (2p) d) Să se calculeze câtul împărțirii polinomului $g = X^3$ la polinomul f .
- (2p) e) Să se verifice că $f(A) = O_2$. (unde $f(A) = A^2 - 6A + 8I_2$).
- (2p) f) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - \ln(x+1)$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (-1, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-1, 0]$.
- (2p) d) Să se arate că $x \geq \ln(x+1)$, $\forall x \in [0, \infty)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (2p) g) Să se arate că $\ln \frac{2008}{2007} < \frac{1}{2007}$, folosind eventual punctul d).

Varianta 018

SUBIECTUL I

- a) $\bar{z} = 1 - 7i$.
- b) $d(D, d) = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.
- c) $2 \cos^2 \frac{\pi}{3} - 1 = -\frac{1}{2}$.
- d) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ punctele L, M, N sunt coliniare.
- e) $S_{ABC} = 16\sqrt{3}$.
- f) $P = 40$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $a_4 = 24$.
- b) $p = \frac{2}{5}$.
- c) $(f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = 1$.
- d) $x = \pm 1$.
- e) $x_1 + x_2 = 1$.

2.

- a) $f'(x) = 2xe^{x^2}$.
- b) $\int_0^1 f'(x) dx = e - 1$.
- c) $x=0$ punct de extrem local.
- d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2e$.
- e) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln 2$.

SUBIECTUL III

- a) $x_1 = 2, x_2 = 4$.

- b)** $\det(A) = 8$.
- c)** $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.
- d)** Efectuând împărțirea obținem câtul $X + 6$.
- e)** $A^2 - 6A + 8I_2 = O_2$.
- f)** Soluția este $x=0$ și $y=0$.
- g)** Fie $P(n) : A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$.
- $$P(1) : A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} (A).$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$\text{Dar } A^{k+1} = A^k \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^k + 2^k & 4^k - 2^k \\ 4^k - 2^k & 4^k + 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^{k+1} + 2^{k+1} & 4^{k+1} - 2^{k+1} \\ 4^{k+1} - 2^{k+1} & 4^{k+1} + 2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

De unde $P(n)$ este (A), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

- a)** $f'(x) = \frac{x}{x+1}$.
- b)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.
- c)** $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-1, 0] \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-1, 0]$.
- d)** Deoarece $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, \infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ $\Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow x \geq \ln(1+x), \forall x \geq 0$.
- e)** $\int_0^1 (x - \ln(x+1)) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 x' \ln(x+1) dx = \frac{1}{2} - x \ln(x+1) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \frac{3}{2} - 2 \ln 2$.
- f)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$.
- g)** Din **d)** pentru $x = \frac{1}{2007} \Rightarrow \frac{1}{2007} > \ln \frac{2008}{2007}$.