

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta017

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine aria unui pătrat cu perimetrul egal cu 8.
- (4p) b) Să se determine lungimea înălțimii unui triunghi echilateral având latura de lungime 4.
- (4p) c) Se consideră triunghiul ABC cu $m(\hat{A})=90^\circ$, $AB=6$ și $AC=10$. Să se calculeze $\tg B$.
- (4p) d) Să se determine numărul real a , astfel încât punctul $A(2,a)$ să aparțină dreptei de ecuație $x+y+1=0$.
- (2p) e) Să se scrie coordonatele mijlocului segmentului determinat de punctele $A(1,2)$ și $B(3,4)$.
- (2p) f) Dacă $\sin x = \frac{3}{4}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $\cos x$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine $x, y \in \mathbf{R}$, astfel încât $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$.
- (3p) b) Să se determine cel mai mare element al mulțimii $A = \{10\sqrt{3}, \sqrt{299}, 12\sqrt{2}\}$.
- (3p) c) Să se calculeze $S = \log_2 8 + \log_2 2^{-1}$.
- (3p) d) Să se determine $x \in \mathbf{R}$, astfel încât $2^x + 2^{x+1} = 3$.
- (3p) e) Să se calculeze numărul complex $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}$.

- 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$,
- (3p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (3p) b) Să se arate că dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - 2007$,

$$f_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{de\ n\ ori\ f}(x).$$

- (4p) a) Să se calculeze $f(2006)$.
- (4p) b) Să se rezolve ecuația $f(x+1) - f((x+1)^2) = -2$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(3000)$.
- (2p) d) Să se calculeze $f_2(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că $f_n(x) = x - n \cdot 2007$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se determine funcția $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, astfel încât $f(g(x)) = f_3(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se demonstreze că $f(1^3) + f(2^3) + \dots + f(n^3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2007n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{3}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)}$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $[0, \infty)$.
- (2p) d) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f către $+\infty$.
- (2p) e) Să se arate că $f(x) \leq \frac{3}{4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_3^4 f'(x) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(\sqrt{5}) + f(\sqrt{8}) + f(\sqrt{11}) + \dots + f(\sqrt{3n+2}))$.

Varianta 17

SUBIECTUL I

- a) $S = 4$.
- b) $h = 2\sqrt{3}$.
- c) $\operatorname{tg}B = \frac{5}{3}$.
- d) $a = -3$.
- e) Punctul C este mijlocul (AB) $\Rightarrow C(2, 3)$.
- f) $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x = 1, y = 2$.
 - b) Cel mai mare element este $10\sqrt{3}$.
 - c) $S = 2$.
 - d) $x = 0$.
 - e) $\frac{1}{i} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-i} + \frac{1}{1} = 0$.
- 2.**
- a) $f(0) = 1$.
 - b) $y = 0$ asimptota orizontală spre $-\infty$.
 - c) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$.
 - d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4}$.
 - e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.

SUBIECTUL III

- a) $f(2006) = -1$.
- b) $x_1 = 1, x_2 = -2$.
- c) Observăm că $f(2007) = 0 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(3000) = 0$.
- d) $f_2(x) = (f \circ f)(x) = f(x - 2007) = x - 4014$.

e) Fie $P(n): f_n(x) = x - n \cdot 2007$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(1): f_1(x) = x - 2007 \text{ (A).}$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): f_k(x) = x - k \cdot 2007 \text{ iar } P(k): f_{k+1}(x) = x - (k+1) \cdot 2007.$$

$$f_{k+1}(x) = (f_k \circ f)(x) = f_k(x - 2007) = x - (k+1) \cdot 2007.$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

f) Din e) $\Rightarrow f_3(x) = x - 6021$. Deci $g(x) - 2007 = x - 6021 \Rightarrow g(x) = x - 4014$.

$$g) f(1^3) + f(2^3) + \dots + f(n^3) = (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) - 2007n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 2007n.$$

SUBIECTUL IV

a) Calcul direct.

$$b) f'(x) = \frac{-6x(2x^2 + 5)}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)^2}.$$

c) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (2, \infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, \infty)$. (aici am modificat)

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ este asymptotă orizontală la } +\infty.$$

$$e) f(x) \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 \leq x^4 + 5x^2 \text{ (A).}$$

$$f) \int_3^4 f'(x) dx = -\frac{63}{4420}.$$

$$g) \text{ Suma se poate scrie } \sum_{k=1}^n f(\sqrt{3k+2}) \stackrel{a)}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k+3} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k+6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3n+6}$$

De unde limita cerută este $\frac{1}{6}$.