

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta015

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(5, -2)$ la punctul $B(-2, 5)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos^2 211 + \sin^2 211$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{6}$.
- (4p) d) Să se calculeze conjugatul numărului complex $-4 + 3i$.
- (2p) e) Să se calculeze $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(5, -2)$ și $B(-2, 5)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Să se calculeze BC , dacă în triunghiul ABC , $AB = 4$, $AC = 6$ și $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n < 32$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $4^x - 64 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive, ecuația $\log_8 x = -2$.
- (3p) e) Să se calculeze $C_5^1 - C_5^4 + C_5^5$.
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 4 + \frac{1}{x^3}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numărul real $\omega = 2 - \sqrt{5}$ și mulțimea $M = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Notăm

$\bar{\omega} = 2 + \sqrt{5}$ și cu $G = \{z \in M \mid \exists x \in M \text{ astfel încât } x \cdot z = 1\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $0 \in M$ și $1 \in M$.
- (4p) b) Să se verifice că $\omega^2 = 4\omega + 1$.
- (4p) c) Să se arate că, dacă $z, y \in G$, atunci $z \cdot y \in G$.
- (2p) d) Să se arate că $(a + b\omega)(a + b\bar{\omega}) \in \mathbf{Z}$, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$.
- (2p) e) Să se arate că $\omega \in G$.
- (2p) f) Să se arate că mulțimea G are cel puțin 2007 elemente.
- (2p) g) Să se arate că $\omega^{2007} \notin \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 5 + 4^x$

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se verifice că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (2p) e) Să se arate că $t^2 + t + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$ și $t^2 - t + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se verifice identitatea $f'(x) = \frac{1}{2}((f'(x))^2 + f'(x) + 1) - \frac{1}{2}((f'(x))^2 - f'(x) + 1)$,
 $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se arate că există două funcții $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ strict crescătoare, astfel
 încât $f(x) = g(x) - h(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 015

Subiectul I

- a) $AB = 7\sqrt{2}$;
- b) $\cos^2 211 + \sin^2 211 = 1$;
- c) Aria cerută este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;
- d) Dacă $z = -4 + 3i$ atunci $\bar{z} = -4 - 3i$;
- e) Obțin $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$;
- f) $\sqrt{52}$;

Subiectul II:

1.

- a) $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$;
- b) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$;
- c) $4^x - 64 = 0 \Leftrightarrow 4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$;
- d) Din definiția logaritmului $x = 8^{-2} = \frac{1}{64}$;
- e) $C_5^1 - C_5^4 + C_5^5 = C_5^1 - C_5^1 + 1 = 1$;

2.

- a) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = -\frac{3}{3^4} = -\frac{1}{27}$;
- c) $f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0, (\forall)x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $(0, \infty)$;
- d) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (4 - x^{-3}) dx = \left[4x + \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2 = \frac{37}{8}$;
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

Subiectul III

- a) $0 = 0 + 0 \cdot \omega$ și $1 = 0 + 1 \cdot \omega$ deci $0 \in M, 1 \in M$.
- b) $\omega^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} - 1 = 4(2 - \sqrt{3}) - 1 = 4\omega - 1$
- c) Fie $z, x \in M \Rightarrow (\exists)a, a', b, b' \in Z$ cu $z = a + b\omega$ și $y = a' + b'\omega$

Am $z + y = (a + a') + (b + b')\omega \in M$ și

$$z \cdot y = a \cdot a' + (a \cdot b' + a' \cdot b)\omega + b \cdot b'\omega^2 = a \cdot a' + (a \cdot b' + a' \cdot b)\omega + b \cdot b'(4\omega - 1) = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b + 4b'b)\omega \in M.$$

d) $(a + b\omega)(a + b\bar{\omega}) = a^2 + b^2\omega\bar{\omega} + ab(\omega + \bar{\omega}) = a^2 + b^2 + 4ab \in \mathbf{Z}$ caci $a, b \in \mathbf{Z}$

e) $\omega = 0 + 1 \cdot \omega \in M$, $\bar{\omega} = 4 - \omega \in M$ și cum $\omega\bar{\omega} = 1$ rezultă $\omega \in G$.

f) Deoarece $\omega \in G$ rezultă $\omega \cdot \omega = \omega^2 \in G$ și prin inducție $\omega^n \in G \ (\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $\{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{2006}\} \subset G$ și $\omega^i \neq \omega^j \ (\forall) i \neq j$. Deci G conține cel puțin 2006 elemente.

g) $\omega^{2006} = (2 - \sqrt{3})^{2006} = C_{2006}^0 2^{2006} + C_{2006}^2 2^{2004} \cdot 3 + \dots + C_{2006}^{2006} 3^{1003} - \sqrt{3}(C_{2006}^1 2^{2005} + C_{2006}^3 2^{2003} \cdot 3 + \dots + C_{2006}^{2005} 2 \cdot 3^{1002}) = a - b\sqrt{3}$

cum $b \neq 0$ și $a, b \in \mathbf{Q}$; deci $\omega^{2006} \notin \mathbf{Q}$.

Subiectul IV:

a) $f'(x) = 4^x \ln 4$;

b) Deoarece $a^x > 0, (\forall) a > 0, a \neq 1$ și $(\forall) x \in \mathbf{R}$ obținem $f(x) = 5 + 4^x > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$, căci și $\ln 4 > 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5 \Rightarrow y = 5$ asimptotă orizontală către $-\infty$

d) $\int_0^1 f(x) dx = \left(5x + \frac{4^x}{\ln 4} \right) \Big|_0^1 = 5 + \frac{4}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} = 5 + \frac{3}{\ln 4}$;

e) Deoarece $u(t) = t^2 + t + 1$ este funcție de gradul al II-lea cu $\Delta = -3 < 0$ ea are semnul coeficientului lui t^2 , adică $u(t) > 0, (\forall) t \in \mathbf{R}$. Analog $t^2 - t + 1 > 0 \ (\forall) t \in \mathbf{R}$;

f) Am $\frac{1}{2}[(f'(x))^2 + f'(x) + 1] - \frac{1}{2}[(f'(x))^2 - f'(x) + 1] = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2} = f'(x)$

g) Fie $g, h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $g(x) = 5 + 2 \cdot 4^x, h(x) = 4^x$.

Am $g'(x) = 2 \cdot 4^x \ln 4 > 0, h'(x) = 4^x \ln 4 > 0$, adică g, h sunt strict crescătoare și evident $f(x) = g(x) - h(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$.