

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta014

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(-5, 0)$ și $B(-1, 3)$.
- (4p) b) Să se calculeze aria unui pătrat cu diagonala de lungime 3 .
- (4p) c) Să se calculeze numărul complex $i + 2i + 3i + \dots + 10i$.
- (4p) d) Să se calculeze conjugatul numărului complex $(-4+i)(5-i)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\cos(2\pi+x)$, unde $\cos x = 0,6$.
- (2p) f) Să se determine $a,b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $C(3, 1)$ și $D(5,-1)$ să fie situate pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se rezolve ecuația $3^{x^2} = 81$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $A^2 - A$, pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.
- (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea $\{2, 3, 4, \dots, 10\}$ să fie par.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} C_n^1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.
- (3p) e) Să se calculeze $\log_3 2 + \log_3 5 - \log_3 10$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(-1)$.
- (3p) b) Să se arate că $f(x) = x + 2 + \frac{5}{x-2}$, pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$.
- (3p) c) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$.
- (3p) d) Să se determine ecuația asymptotei verticale la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-1}^1 (x-2)f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + y - 4$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că $e = 4$ este elementul neutru în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.
- (4p) c) Să se determine simetricul elementului 5 în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.
- (2p) d) Să se arate că $(-a) \circ a = -4$, $\forall a \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\underbrace{x \circ x \circ x \circ \dots \circ x}_{denori} = nx - 4(n-1)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ și $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația: $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2007\ ori} = 4$.
- (2p) g) Să se calculeze $(-2007) \circ (-2006) \circ \dots \circ 0 \circ \dots \circ 2006 \circ 2007$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x+2) - \ln(x+1)$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in (-1, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $(-1, \infty)$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) e) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in (-1, \infty)$.
- (2p) f) Să se arate că $\int_0^x \ln(t+a) dt = x \cdot \ln(x+a) - x + a \ln \frac{x+a}{a}$, $\forall x \in (-a, \infty)$, pentru $a \in (0, \infty)$.
- (2p) g) Să se calculeze aria suprafeței plane determinată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Varianta 14

SUBIECTUL I

- a) $AB = 5$.
- b) $S = \frac{9}{2}$.
- c) $i + 2i + \dots + 10i = 55i$.
- d) $\bar{z} = -19 - 9i$.
- e) $\cos(2\pi + x) = 0,6$.
- f) $a = 1$ și $b = -4$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x = \pm 2$.
- b) $A^2 - A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.
- c) $p = \frac{5}{9}$.
- d) $n = 6$.
- e) $\log_3 2 + \log_3 5 - \log_3 10 = 0$.

2.

- a) $f(-1) = -\frac{2}{3}$.
- b) $x + 2 + \frac{5}{x-2} = f(x); \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$.
- c) $f'(x) = 1 - \frac{5}{(x-2)^2}$.
- d) $x=2$ este asimptotă verticală.
- e) $\int_{-1}^1 (x-2)f(x)dx = \frac{8}{3}$.

SUBIECTUL III

- a) $(x \circ y) \circ z = (x + y - 4) \circ z = x + y + z - 8$.
 $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 4) = x + y + z - 8 \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
- b) Demonstrăm relația $x \circ y = y \circ x \Leftrightarrow x + y - 4 = y + x - 4$ (A) $\forall x, y \in \mathbf{R}$. Atunci
 $x \circ e = x, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x + e - 4 = x, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e = 4$.
- c) Notăm cu $5'$ simetricul elementului 5 , atunci : $5 \circ 5' = e \Leftrightarrow 5 + 5' - 4 = 4 \Leftrightarrow 5' = 3$.

d) $(-a) \circ a = -a + a - 4 = -4, \forall a \in \mathbf{R}.$

e) Fie $P(n): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ n\ ori} = nx - 4(n-1), n \in \mathbf{N}^*.$

$P(1): x = x$ (A). Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$P(k): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k\ ori} = kx - 4(k-1)$ iar $P(k+1): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k+1\ ori} = (k+1)x - 4k.$

Dar $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k+1\ ori} = \left(\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k\ ori} \right)^{P(k)} = (kx - 4(k-1)) \circ x = (k+1)x - 4k.$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) Folosind e) ecuația devine $2007x - 4 \cdot 2006 = 4 \Leftrightarrow x = 4.$

g) Folosind d) și faptul că legea „ \circ ” este comutativă și asociativă, obținem
 $(-2007) \circ (-2006) \circ \dots \circ 0 \circ \dots \circ 2007 = (-2007 \circ 2007) \circ (-2006 \circ 2006) \circ \dots \circ (-1 \circ 1) \circ 0$
 $= (-4) \circ (-4) \circ \dots \circ (-4) \circ 0 \stackrel{e)}{=} -16052 \circ 0 = -16056.$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{1}{12}.$

c) $f'(x) < 0, \forall x > -1 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-1, \infty).$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+2}{x+1} \right) = 0.$

e) Din c) rezultă că funcția f este strict descrescătoare și din d) rezultă că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, deci $f(x) > 0, \forall x \in (-1, \infty).$

f) $\int_0^x \ln(t+a) dt = t \ln(t+a) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{t+a} dt = x \ln(x+a) - x + a \ln \frac{x+a}{a}.$

g) $S = \int_0^1 f(x) dx = \left(x \ln(x+2) - x + 2 \ln \frac{x+2}{2} \right) \Big|_0^1 - \left(x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) \right) \Big|_0^1$
 $= 3 \ln 3 - 4 \ln 2.$