

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta013

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze numărul complex $i + i^2 + \dots + i^8$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos 0^\circ + \sin 0^\circ$.
- (4p) c) Să se calculeze perimetrul triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-1,1)$, $B(0,1)$ și $C(0,-1)$.
- (4p) d) Dacă $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ să se calculeze $-2\vec{u} + \vec{v}$.
- (2p) e) Să se calculeze $2a + b$ astfel încât $ax + by + c = 0$ să reprezinte ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2,3)$ și $B(6,5)$.
- (2p) f) Să se calculeze distanța dintre punctele $B(0,1)$ și $C(0,-1)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\sqrt{5-x} \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se rezolve inecuația $9 - x^2 \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se rezolve ecuația $C_n^0 + C_n^1 - 1 = 48$, $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$.
- (3p) d) Să se determine probabilitatea ca un element din mulțimea $\{0,1,2,3,4,5\}$ să fie soluție a ecuației $3^{x^2-4x+3} = 27$.
- (3p) e) Să se arate că mulțimea $M = (2, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbf{R} , în raport cu legea $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x \in (-1, +\infty)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $(-1, +\infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x \cdot f'(x))$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f'(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = 2X^2 + 2X + 3$ și $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ rădăcinile sale.

- (4p) a) Să se calculeze $x_1 + x_2$ și $x_1 \cdot x_2$.
- (4p) b) Să se calculeze expresia $f(x) - 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) \geq \frac{5}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât $f = a(X - x_1)(X - x_2)$.
- (2p) e) Să se calculeze valoarea expresiei $2(2 - x_1)(2 - x_2)$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că
- $$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$
- (2p) g) Să se calculeze $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$, $g(x) = f'(x)$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $[0, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că $g'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se demonstreze că $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se rezolve ecuația $f(x) + 2f'(x) + g'(x) = 4e^3 - x - 3$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2e^{2x}}$.
- (2p) g) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \frac{g(x) - e^x}{x^2 + 1} dx$.

Varianta 13

SUBIECTUL I

- a) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^8 = 0$.
 b) $\cos 0 + \sin 0 = 1$.
 c) $AB = 1; BC = 2; AC = \sqrt{5} \Rightarrow P = 3 + \sqrt{5}$.
 d) $-2\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$.
 e) $2a+b=0$.
 f) $BC = 2$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x \in (-\infty, 5]$.
 b) $x \in [-3, 3]$.
 c) $n = 48$.
 d) $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
 e) M este parte stabilă dacă $\forall x, y \in M \Rightarrow x \circ y \in M$. Fie $x, y \in M \Rightarrow x > 2, y > 2$
 $x \circ y > 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 > 2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) > 0$. Relație care este adevărată.

2.

- a) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{3}$.
 c) $f'(x) > 0, \forall x > -1 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1, \infty)$. (aici am modificat)
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$.
 e) $\int_1^2 f'(x) dx = \ln \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL III

- a) $x_1 + x_2 = -1$ și $x_1 x_2 = \frac{3}{2}$.
 b) $f(x) - 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = 0$.

c) Din **b)** rezultă $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}; \forall x \in \mathbf{R}$.

d) $f = 2(X - x_1)(X - x_2) \Rightarrow a = 2$.

e) Din **d)** rezultă $2(2 - x_1)(2 - x_2) = f(2) = 15$.

f) Fie $P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbf{N}^*$.

$$P(1): 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} (\text{A}).$$

Presupunem $P(k)$ (A) și demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde $k \geq 1$.

$$P(k): 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \text{ iar}$$

$$P(k+1): 1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \text{ Dar}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{P(k)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

De unde $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 3n$
 $= \frac{n(2n^2 + 6n + 13)}{3}.$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = e^x - 1$.

b) $f'(x) \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, \infty)$.

c) $g'(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

d) $f'(x) < 0, \forall x < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$, și folosind **b)** avem că $A(0,0)$ este un punct de minim global al funcției f . Rezultă că $f(x) \geq 0; \forall x \in \mathbf{R}$, deci $e^x \geq x+1; \forall x \in \mathbf{R}$.

e) Ecuația devine $4e^x = 4e^3 \Rightarrow x = 3$.

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{4e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{8e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{8e^x} = 0$.

g) $\int_{-1}^1 \frac{-1}{x^2 + 1} dx = -\frac{\pi}{2}$.