

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianța012

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(2, 3)$ la punctul $B(3, 4)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos^2 201 + \sin^2 201$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{5}$.
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex $-2 + 5i$.
- (2p) e) Să se calculeze $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(2, 3)$ și $B(3, 4)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Să se calculeze BC , dacă în triunghiul ABC , $AB = 3, AC = 2$ și $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $2^n < 10$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^x - 9 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_4 x = -1$.
- (3p) e) Să se calculeze expresia $E = C_5^1 - C_5^4$.
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{3n+2}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numărul real $\omega = 2 - \sqrt{3}$ și mulțimea $M = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Notăm

$\bar{\omega} = 2 + \sqrt{3}$ și cu $G = \{z \in M \mid \exists x \in M \text{ astfel încât } x \cdot z = 1\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $0 \in M$ și $1 \in M$.
- (4p) b) Să se verifice că $\omega^2 = 4\omega - 1$.
- (4p) c) Să se arate că, dacă $z, y \in M$, atunci $z + y \in M$ și $z \cdot y \in M$.
- (2p) d) Să se arate că $(a + b\omega)(a + b\bar{\omega}) \in \mathbf{Z}$, $\forall a, b \in \mathbf{Z}$.
- (2p) e) Să se arate că $\omega \in G$.
- (2p) f) Să se arate că mulțimea G are cel puțin 2006 elemente.
- (2p) g) Să se arate că $\omega^{2006} \notin \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{3x} + 2$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se verifice că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (2p) e) Să se arate că $t^2 + t + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$ și $t^2 - t + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se verifice identitatea $f'(x) = \frac{1}{2}((f'(x))^2 + f'(x) + 1) - \frac{1}{2}((f'(x))^2 - f'(x) + 1)$,
 $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se arate că există două funcții $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ strict crescătoare, astfel
 încât $f(x) = g(x) - h(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 012

Subiectul I

a) $AB = \sqrt{2}$

b) $\cos^2 201 + \sin^2 201 = 1$

c) Aria este $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

d) Daca $z = -2 + 5 \cdot i$ atunci $\bar{z} = -2 - 5 \cdot i$

e) Se obține soluția $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

f) $\sqrt{13}$.

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 64 + 49 = 113$

b) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$

c) $3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

d) Din definiția logaritmului se obține $x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$.

e) $E = C_5^1 - C_5^4 = C_5^1 - C_5^1 = 0$.

2.

a) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -2$

c) $f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0 (\forall) x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

d) $\int_1^2 f(x) dx = (x - \frac{1}{x}) \Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{3}{2}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{3n+2} = \frac{1}{3}$

Subiectul III

a) $0 = 0 + 0 \cdot \omega$ și $1 = 0 + 1 \cdot \omega$ deci $0 \in M, 1 \in M$.

b) $\omega^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} - 1 = 4(2 - \sqrt{3}) - 1 = 4\omega - 1$

c) Fie $z, x \in M \Rightarrow (\exists) a, a', b, b' \in Z$ cu $z = a + b\omega$ și $y = a' + b'\omega$

Am $z + y = (a + a') + (b + b')\omega \in M$ si

$$z \cdot y = a \cdot a' + (a \cdot b' + a' \cdot b)\omega + b \cdot b'\omega^2 = a \cdot a' + (a \cdot b' + a' \cdot b)\omega + b \cdot b'(4\omega - 1) = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b + 4b'b)\omega \in M.$$

d) $(a + b\omega)(a + b\bar{\omega}) = a^2 + b^2\omega\bar{\omega} + ab(\omega + \bar{\omega}) = a^2 + b^2 + 4ab \in \mathbb{Z}$ caci $a, b \in \mathbb{Z}$

e) $\omega = 0 + 1 \cdot \omega \in M$, $\bar{\omega} = 4 - \omega \in M$ si cum $\omega\bar{\omega} = 1$ rezultă $\omega \in G$.

f) Deoarece $\omega \in G$ rezultă $\omega \cdot \omega = \omega^2 \in G$ si prin inducție $\omega^n \in G \ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{2006}\} \subset G$ si $\omega^i \neq \omega^j \ (\forall) i \neq j$. Deci G conține cel puțin 2006 elemente.

g) $\omega^{2006} = (2 - \sqrt{3})^{2006} = C_{2006}^0 2^{2006} + C_{2006}^2 2^{2004} \cdot 3 + \dots + C_{2006}^{2006} 3^{1003} - \sqrt{3}(C_{2006}^1 2^{2005} + C_{2006}^3 2^{2003} \cdot 3 + \dots + C_{2006}^{2005} 2 \cdot 3^{1002}) = a - b\sqrt{3}$

cu $b \neq 0$ și $a, b \in \mathbb{Q}$; deci $\omega^{2006} \notin \mathbb{Q}$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$

b) $f'(x) > 0 \ (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ strict crescătoare pe \mathbb{R} .

c) deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ asimptota orizontală.

d) $\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{e^{3x}}{3} + 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{3} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{e}{3} + \frac{5}{3}$.

e) Deoarece $u(t) = t^2 + t + 1$ este funcție de gradul al II-lea cu $\Delta = 1 - 4 < 0$ ea are semnul coeficientului lui t^2 adică $u(t) > 0$; analog pentru $t^2 - t + 1$.

f) $\frac{1}{2}[(f'(x))^2 + f'(x) + 1] - \frac{1}{2}[(f'(x))^2 - f'(x) + 1] = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2} = f'(x)$

g) Fie $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 2 + 2 \cdot e^{3x}$ si $h(x) = e^{3x}$.

Am $g'(x) = 6e^{3x} > 0$, $h'(x) = 3e^{3x} > 0$ adică g și h sunt strict crescătoare și evident $f(x) = g(x) - h(x)$.