

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D/F**
**Varianța ....011**

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**NOTĂ.**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se determine numărul  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât dreptele de ecuații  $3x - y + 5 = 0$  și  $ay + x = 6$  să fie paralele.
- (4p) b) Să se determine partea reală a numărului complex  $(3-i)(-2+3i)$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $5 \cdot \sin^3 \pi$ .
- (4p) d) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 8.
- (2p) e) Să se arate că expresia  $E = 2\sin^2 x + 5 + 2\cos^2 x$  nu depinde de  $x$ .
- (2p) f) Să se calculeze numărul complex  $i^8$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

- 1.
- (3p) a) Să se calculeze  $1+3+3^2+\dots+3^{20}$ .
- (3p) b) Să se determine numărul permutărilor mulțimii  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- (3p) c) Să se determine valorile lui  $x \in \mathbf{Z}$ ,  $x \neq 2$ , astfel încât  $\frac{1}{x-2} \in \mathbf{Z}$ .
- (3p) d) Să se calculeze produsul soluțiilor reale ale ecuației  $x^2 - 2x - 5 = 0$ .
- (3p) e) Să se compare numerele  $\log_7 3$  și  $\log_7 5$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .
- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ , pentru  $x \in \mathbf{R}^*$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^3 \cdot f(x))$ .
- (3p) c) Să se determine ecuația asymptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\int_1^2 f(x) dx$ .
- (3p) e) Să se arate că funcția  $f$  este descrescătoare pe  $(-\infty, 0)$ .

**Proba D.** Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

**Proba F.** Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_2(\mathbf{R})$ , se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x-3 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (4p) a) Să se calculeze matricea  $C = B - A$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $A^2$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\det(C)$ .
- (2p) d) Să se verifice identitatea  $(A - I_2)(A + I_2) = O_2$ .
- (2p) e) Să se demonstreze că  $C^2 = (2x-4) \cdot C - (\det C) \cdot I_2$ .
- (2p) f) Să se arate că  $C^2 = (2x-4) \cdot C$  dacă și numai dacă  $x \in \{1, 3\}$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $A + A^2 + \dots + A^{2007}$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (3, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ , pentru  $x \in (3, \infty)$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x-3}}$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ .
- (2p) d) Să se arate că dreapta de ecuație  $y = x$  este asimptota oblică spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (2p) e) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $(3, \infty)$ .
- (2p) f) Să se arate că funcția  $F : (3, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F(x) = \frac{1}{2} \left( x \cdot \sqrt{x^2 - 9} - 9 \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 - 9}) \right)$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- (2p) g) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuație  $x = 4$  și  $x = 5$ .

### Varianta 11

**Subiectul I**

- a)  $a = -\frac{1}{3}$ .  
 b) Partea reală este  $-3$ .  
 c)  $5 \sin^3 \pi = 0$ .  
 d)  $S = 16\sqrt{3}$ .  
 e)  $E = 7$ .  
 f)  $i^8 = 1$ .

**Subiectul II**

1.

- a)  $S_{21} = \frac{3^{21} - 1}{2}$ .  
 b)  $P_5 = 5! = 120$ .  
 c)  $x \in \{1, 3\}$ .  
 d)  $x_1 \cdot x_2 = \frac{-5}{1} = -5$ .  
 e)  $\log_7 3 < \log_7 5$ .

2.

- a)  $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$ .  
 b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 \cdot f(x) = 5$ .  
 c)  $y = 0$  este asimptotă orizontală la  $+\infty$ .  
 d)  $\int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{8}$ .  
 e) Din a) rezultă că  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in (-\infty, 0)$ , deci  $f$  este descrescătoare pe  $(-\infty, 0)$ .

**Subiectul III**

- a)  $C = B - A = \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$ .  
 b) Prin calcul direct obținem  $A^2 = I_2$ .  
 c)  $\det C = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 - 1$ .

d)  $(A - I_2)(A + I_2) = A^2 - I_2 = O_2.$

e)  $C^2 = \begin{pmatrix} (x-2)^2 + 1 & 2(x-2) \\ 2(x-2) & (x-2)^2 + 1 \end{pmatrix}$  și  $(2x-4) \cdot C - (\det C)I_2 = C^2.$

f) Dacă  $C^2 = (2x-4)C$ , din e) obținem  $(\det C)I_2 = O_2.$

Rezultă  $\det C = 0$ , deci  $(x-2)^2 = 1 \Rightarrow x \in \{1,3\}.$

Reciproc: dacă  $x = 1$ ;  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ , deci  $C^2 = -2C = (2 \cdot 1 - 4) \cdot C$

dacă  $x = 3$ ;  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ , deci  $C^2 = 2C = (2 \cdot 3 - 4) \cdot C.$

g)  $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2007} \stackrel{b)}{=} A + I_2 + A + I_2 + \dots + A = 1003 \cdot (A + I_2) + A =$

$$= 1003 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2007 & 0 \\ 1004 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### Subiectul IV

a)  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$ ,  $\forall x \in (3, \infty).$

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x-3}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \sqrt{x+3} = \sqrt{6}.$

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \frac{4}{\sqrt{7}}.$

d) Obținem  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$  și  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 9} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0.$

Deci  $y = x$  este asimptota oblică la  $+\infty$ .

e) Din a) obținem că  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in (3, \infty) \Rightarrow f$  este crescătoare pe intervalul  $(3, \infty)$ .

f)  $F'(x) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 9}} = \sqrt{x^2 - 9} = f(x)$ ,  $\forall x \in (3, \infty)$

Deci  $F$  este derivabilă pe  $(3, \infty)$  și  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in (3, \infty) \Rightarrow F$  este o primitivă pentru funcția  $f$ .

g)  $S_f = \int_4^5 f(x) dx = F(5) - F(4) = \frac{1}{2}(20 - 9 \ln 9) - \frac{1}{2}(4\sqrt{7} - 9 \ln(4 + \sqrt{7})).$