

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta010

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(-3,6)$ și $B(5,2)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos^2 2007 + \sin^2 2007$.
- (4p) c) Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{5}{2-i}$.
- (4p) d) Să se calculeze diagonala patratului care are lungimea laturii 5.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(-3,6)$ și $B(5,2)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Să se calculeze aria triunghiului ABC , dacă $AB = 6$, $AC = 5$ și $m(\hat{BAC}) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se determine numărul de funcții $f : \{a, b\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ cu proprietatea $f(a) + f(b) = 4$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale, ecuația $5^x - 1 = 24$.
- (3p) d) Să se calculeze $1 + 11 + 21 + 31 + \dots + 101$.
- (3p) e) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 1$. Să se determine punctul de coordonate egale, de pe graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine punctul de extrem local al funcției f .
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și polinomul $f = X^2 + 2X - 15$.

- (4p) a) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 3$.
- (4p) b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale, ecuația $f(x) = 0$.
- (4p) c) Să se arate că $\det A \neq 0$.
- (2p) d) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$.
- (2p) e) Să se calculeze matricea A^2 .
- (2p) f) Să se verifice egalitatea $f(A) = O_2$, unde $f(A) = A^2 + 2A - 15I_2$.
- (2p) g) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $(A + B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$ și sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

$$a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n).$$

- (4p) a) Să se calculeze a_1 .
- (4p) b) Să se arate că $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$.
- (4p) c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) d) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător.
- (2p) e) Să se determine ecuația asymptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) f) Să se calculeze $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\int_1^n \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx - \frac{1}{2} \right)$.

Varianta 10

Subiectul I

- a) $d(A, B) = 4\sqrt{5}$.
- b) $\cos^2 2007 + \sin^2 2007 = 1$.
- c) Partea reală este egală cu 2.
- d) $d = 5\sqrt{2}$.
- e) $a = 2, b = -9$.
- f) $S_{ABC} = \frac{15}{2}$.

Subiectul II

1.

- a) $\begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 0$.
- b) Există 3 funcții cu proprietatea cerută.
- c) $x = 2$.
- d) $1 + 11 + 21 + 31 + \dots + 101 = 561$.
- e) $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in G_f$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
- c) $x = 1$ este punct de minim local.
- d) Ecuția asymptotei verticale este $x = 0$.
- e) $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^3}{3} + \frac{5}{3}$.

Subiectul III

- a) $f = X^2 + 2X - 15 = (X + 5)(X - 3)$ rezultă cătul este $X + 5$ și restul este 0.
- b) $x = -5$ sau $x = 3$.
- c) $\det A = 1 - 16 = -15 \neq 0$.
- d) $x = y = 0$.

e) $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$.

f) Prin calcul direct avem $f(A) = O_2$.

g) Vom demonstra $P(n): (A + B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Verificare: $P(1)$: adevărată.

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbb{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

$$(A + B)^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $\forall n \in \mathbb{N}^*, (A + B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Subiectul IV

a) $a_1 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

b) Din $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^3} \right) = 1$.

d) $a_{n+1} - a_n = f(n+1) = \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} > 0$, deci sirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este crescător.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow y = 0$ este ecuația asymptotei către $+\infty$.

f) $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = \frac{-1}{2x^2} \Big|_1^2 = \frac{3}{8}$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\int_1^n \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx - \frac{1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{-1}{2x^2} \Big|_1^n - \frac{1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{2n^2} = -\frac{1}{2}$.