

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianța009

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu perimetrul 18.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(3, 0)$ și $C(4, -1)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3, 0)$ și $C(4, -1)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3, 0)$, $B(2, 2)$ și $C(4, -1)$.
- (2p) f) Să se calculeze aria unui pătrat cu diagonala de lungime $4\sqrt{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + 7x - 15 = 0$.
- (3p) b) Să se calculeze expresia $\log_2 3 \cdot \log_3 2$.
- (3p) c) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive , ecuația $(\log_2 x)^2 = \log_2 x$.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale , ecuația $5^x - 125 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $C_6^n < 10$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - \arctgx$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.

- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

- (3p) d) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianța 009

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcția $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.
- (4p) b) Să se arate că $f(x) = 1 + \frac{2}{x+1}$, $\forall x \in [1, \infty)$.
- (4p) c) Să se rezolve, în intervalul $[1, \infty)$, ecuația $f(x) = x$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.
- (2p) e) Să se arate că $(f \circ f)(x) = \frac{2x+3}{x+2}$, $\forall x \in [1, \infty)$.
- (2p) f) Să se arate că, dacă $x, y \in (1, \infty)$, $x \neq y$, atunci $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|$.
- (2p) g) Să se arate că $\left| \frac{p}{q} - \sqrt{3} \right| > 2 \cdot \left| \frac{p+3q}{p+q} - \sqrt{3} \right|$, $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \geq q$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f(e)$ și $f'(e)$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[e, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că $f(x) \leq \frac{1}{e}$, $\forall x > 0$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) g) Să se determine $x \in (0, \infty)$, cu proprietatea că $f(x) + f\left(\frac{x^2}{e}\right) = \frac{2}{e}$.

Varianta 9

Subiectul I

- a) $h = 3\sqrt{3}$.
- b) $AC = \sqrt{2}$.
- c) $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
- d) $a = 1, b = -3$.
- e) $S_{ABC} = \frac{1}{2}$.
- f) $S = 16$.

Subiectul II

1.

- a) $x_1 + x_2 = -7$.
- b) $\log_2 3 \cdot \log_3 2 = 1$.
- c) $x = 1$ sau $x = 2$.
- d) $x = 3$.
- e) $p = \frac{2}{5}$.

2.

- a) $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.
- b) $\int_0^1 f'(x) dx = 1 - \frac{\pi}{4}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.
- d) $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Subiectul III

- a) $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.
- b) $f(x) = \frac{x+1+2}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}, \forall x \geq 1$.

- c) $f(x) = x \Rightarrow \frac{x+3}{x+1} = x \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$, deci $x = \sqrt{3} > 1$.
- d) Din b) avem $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in [1, \infty)$ $\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, \infty)$.
- e) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2x+3}{x+2}$.
- f) $|f(x) - f(y)| = \left| 1 + \frac{2}{x+1} - 1 - \frac{2}{y+1} \right| = 2 \left| \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} \right| = 2 \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)} < \frac{1}{2}|x-y|$.
- g) Punând $x = \frac{p}{q}, y = \sqrt{3}, (p \geq q \Rightarrow x \geq 1)$ în inegalitatea de la f) se obține inegalitatea cerută.

Subiectul IV

- a) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
- b) $f(e) = \frac{1}{e}, f'(e) = 0$.
- c) Din $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \leq 0, \forall x \in [e, \infty)$ \Rightarrow funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[e, \infty)$.
- d) Dacă $x \in (0, e] \Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ funcția f este strict crescătoare pe $(0, e]$. Folosind c) rezultă $x = e$ este punct de maxim global $\Rightarrow f(x) \leq f(e), \forall x \in (0, \infty)$, deci $f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0, \infty)$.
- e) $I = \int_1^e f(x) dx = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^e = \frac{1}{2}$.
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.
- g) Din $f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0, \infty)$ avem $f(x) + f\left(\frac{x^2}{e}\right) \leq \frac{2}{e}$ cu egalitate pentru $x = e$.