

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta007

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $\sin 2\pi$.
- (4p) b) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(1,2)$ și $B(3,5)$ să aparțină dreptei de ecuație $ax + by + 1 = 0$.
- (4p) c) Să se determine conjugatul numărului complex $z = 2 + 5i$.
- (4p) d) Să se calculeze produsul de numere complexe $i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots \cdot i^{10}$.
- (2p) e) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral având lungimea laturii 1.
- (2p) f) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului (MN) , dacă $M(2,4)$ și $N(4,6)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $1 + 2 + 3 + \dots + 37$.
- (3p) b) Să se calculeze $\log_2 8$.
- (3p) c) Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea $\{1,2,3,\dots,30\}$ să fie divizibil cu 5.
- (3p) d) Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $2^x = \frac{1}{2}$.
- (3p) e) Să se calculeze $(f \circ f)(1)$, dacă $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = x^2 + x - 1$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x), \forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{f(x)}$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și polinoamele

$$f = X^2 + X - 2, \quad g = X^{100}.$$

- (4p) a) Să se calculeze matricea A^2 .
- (4p) b) Să se calculeze matricea $A^2 + A - 2I_2$.
- (4p) c) Să se calculeze determinantul matricei A .
- (2p) d) Să se determine numărul real a , astfel încât $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2$.
- (2p) e) Să se arate că $\det(I_2 + A^2) = 1$.
- (2p) f) Să se arate că polinomul f se divide cu polinomul $X - 1$.
- (2p) g) Să se determine restul împărțirii polinomului g la polinomul f .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} - \{-1, -2\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x+1) \cdot (x+2)}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(x) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R} - \{-1, -2\}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $[0, \infty)$.
- (2p) d) Să se determine ecuațiile asimptotelor verticale la graficul funcției f .
- (2p) e) Să se arate că $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(n)]$.
- (2p) g) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

Varianta 7

Subiectul I

- a) $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$.
 b) $a = 3, b = -2$.
 c) $\overline{2+5i} = 2-5i$.
 d) $i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{10} = -i$.
 e) $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
 f) P este mijlocul segmentului $(MN) \Rightarrow x_p = 3, y_p = 5$.

Subiectul II

1.

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 37 = 703$.
 b) $\log_2 8 = 3$.
 c) $p = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.
 d) $x = -1$.
 e) $(f \circ f)(1) = 1$.

2.

- a) $f'(x) = e^x$.
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e$.
 c) $\int_0^1 f(x) dx = e - 1$.
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{f(x)} = 0$.

Subiectul III

a) $A^2 = O_2$.

b) Prin calcul direct rezultă $A^2 + A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

c) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

d) $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 \Leftrightarrow I_2 + aA + A + aA^2 = I_2 \Leftrightarrow (a+1)A = O_2 \Rightarrow a = -1.$

e) Din a) rezultă $\det(I_2 + A^2) = \det I_2 = 1.$

f) f se divide cu polinomul $X - 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$, adevărat prin calcul.

g) Din teorema împărțirii cu rest rezultă că $g = f \cdot q + aX + b \Leftrightarrow$

$$g = (X + 2)(X - 1) \cdot q + aX + b.$$

Pentru $x = -2$, respectiv $x = 1$ se obține $a = \frac{1 - 2^{100}}{3}$, $b = \frac{2 + 2^{100}}{3}$, deci

$$r = \frac{1 - 2^{100}}{3}X + \frac{2 + 2^{100}}{3}.$$

Subiectul IV

a) Prin calcul $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0.$

b) $f'(x) = \left(\frac{1}{(x+1) \cdot (x+2)} \right)' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}.$

c) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} < 0$, $(\forall)x \in [0, \infty)$, deci funcția f este descrescătoare pe $[0, \infty).$

d) Ecuatiile asymptotelor verticale sunt $x = -2$, respectiv $x = -1$.

e) Din a) rezultă $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ și deci $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.$

g) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{4}{3}.$