EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D/F

Varianta **….003**

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2.Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,2)$ la punctul $B(-2,3)$.

(4p) **b)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2+3i)(4-i)=a+bi$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{12}$.

(4p) **d)** Să se determine conjugatul numărului complex $12-7i$.

(2p) **e)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3,2)$ și $B(-2,3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **f)** Dacă în triunghiul ABC, $AB=8$, $AC=6$ și $m\left(B\hat{A}C\right)=90^\circ$, să se calculeze BC.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix}10 & -2\\ 20 & -3\end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $2^n\geq 9$.

(3p) **c)** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale , ecuația $16^x-2=0$.

(3p) **d)** Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale strict pozitive ,ecuația $\log_6 x=3$.

(3p) **e)** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f=X^4-2X^2+1$ la polinomul $g=X^2+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$, $f(x)=10+\dfrac{1}{x^{10}}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}^*$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **c)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^5}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi funcția

$f:\left(\frac{1}{2},\infty\right)\to\left(\frac{1}{2},\infty\right),\ f(x)=\frac{3x-1}{4x-1}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A+I_2=B$.

(4p) **b)** Să se arate că $A^2=O_2$.

(4p) **c)** Să se calculeze matricea B^2.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $x>\frac{1}{2}$, atunci $\frac{3x-1}{4x-1}>\frac{1}{2}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $(f\circ f)(x),\ x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $B^n=I_2+nA,\ \forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori\ f}(x)=\frac{(2n+1)x-n}{4nx+1-2n},\ \forall n\in\mathbf{N}^*,\ \forall x>\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $f(x)=x^3+6x^2+11x+6$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $f'(x)=0$.

(2p) **d)** Să se arate că funcția f are un punct de maxim local şi un punct de minim local .

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(2p) **f)** Să se verifice identitatea $f'(x)=\frac{1}{2}\left((f'(x))^2+f'(x)+1\right)-\frac{1}{2}\left((f'(x))^2-f'(x)+1\right)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se arate că există funcțiile $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea $f(x)=g(x)-h(x),\ \forall x\in\mathbf{R}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Varianta 3

Subiectul I

a) $AB=\sqrt{26}$.
b) $a=11$ şi $b=10$.
c) $S=3\sqrt{3}$.
d) $12+7i$.
e) $a=5$ şi $b=-13$.
f) $BC=10$.

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 20 & -3 \end{vmatrix}=-30+40=10$.

b) $p=\frac{2}{5}$.

c) $x=\frac{1}{4}$.

d) $x=6^3$.

e) Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem câtul x^2-3 şi restul 4.

2.

a) $f'(x)=\frac{-10}{x^{11}}$, $x\in\mathbf{R}^*$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-10$.

c) $D=\mathbf{R}^*$; $x=0$ este ecuația asimptotei verticale .

d) $\int_1^2 f(x)dx=\frac{91}{9}-\frac{1}{9\cdot 2^9}$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^5}=1$.

Subiectul III

a) Se verifică prin calcul direct.
b) Se verifică prin calcul direct.
c) $B^2=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

d) $\frac{3x-1}{4x-1}-\frac{1}{2}=\frac{2x-1}{2(4x-1)}>0$, dacă $x>\frac{1}{2}$.

e) $(f\circ f)(x)=\frac{3f(x)-1}{4f(x)-1}=\frac{5x-2}{8x-3}$.

f) Notăm $P(n)$: $B^n=I_2+nA$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

Pentru $n=1$ obținem $B^1=I_2+A$, adevărat din punctul **a).**

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k\in\mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Dar $B^{k+1}=B^k\cdot B=(I_2+kA)B\overset{a)}{=}(I_2+kA)(I_2+A)=I_2+kA+A+kA^2$

$\overset{b)}{=}I_2+kA+A=I_2+(k+1)A$. Deci $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $B^n=I_2+nA$.

g) Demonstrăm prin inducției, relația cerută.

$P(n):\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori\ f}(x)=\frac{(2n+1)x-n}{4nx+1-2n}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k\in\mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Dar $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ k+1\ ori\ f}(x)=\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ k\ ori\ f}(f(x))=\frac{(2k+1)f(x)-k}{4kf(x)+1-2k}$

$=\frac{(2k+3)x-(k+1)}{4(k+1)x+1-2(k+1)}$. Deci $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $P(n)$ $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

Subiectul IV

a) $f'(x)=((x+1)(x+2)(x+3))'=3x^2+12x+11$.

b) Se verifică prin calcul direct.

c) $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+12x+11=0\Rightarrow x_1=\frac{-6+\sqrt{3}}{3}$ şi $x_2=\frac{-6-\sqrt{3}}{3}$.

d) Rezultă $x_1=\frac{-6-\sqrt{3}}{3}$ este punct de maxim local, iar $x_2=\frac{-6+\sqrt{3}}{3}$ este punct de minim local.

e) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x^3+6x^2+11x+6)dx=\frac{55}{4}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

f) Prin calcul direct, rezultă $\frac{1}{2}\left((f'(x))^2+f'(x)+1\right)-\frac{1}{2}\left((f'(x))^2-f'(x)+1\right)=$
$=f'(x), \forall x\in \mathbf{R}$.

g) Din **f)** rezultă $f'(t)=\frac{1}{2}\left((f'(t))^2+f'(t)+1\right)-\frac{1}{2}\left((f'(t))^2-f'(t)+1\right), \forall t\in \mathbf{R}$,

de unde $\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}\left((f'(t))^2+f'(t)+1\right)dt - \int_0^x \frac{1}{2}\left((f'(t))^2-f'(t)+1\right)dt$, $\forall x\in \mathbf{R}$ **(1).**

Notăm $g(x)=\int_0^x \frac{1}{2}\left((f'(t))^2+f'(t)+1\right)dt$ şi $h(x)=\int_0^x \frac{1}{2}\left((f'(t))^2-f'(t)+1\right)dt$. Atunci

$g'(x)=\frac{1}{2}\left((f'(x))^2+f'(x)+1\right)>0$ şi $h'(x)=\frac{1}{2}\left((f'(x))^2-f'(x)+1\right)>0$, $\forall x\in \mathbf{R}$, rezultă
că funcțiile g şi h sunt strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, iar egalitatea (**1**) devine
$f(x)-f(0)=g(x)-h(x)$. Cum $f(0)=6$ rezultă $f(x)=(g(x)+6)-h(x)$, $\forall x\in \mathbf{R}$ cu
$g+6$ şi h strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro