

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta002

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 0)$, $B(3, 3)$, $C(0, 6)$ și $D(2, 2)$.

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul A la punctul B .
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) c) Să se demonstreze că punctele A , C și D sunt coliniare.
- (4p) d) Să se arate că triunghiul DEF este dreptunghic, unde $DE = 5\sqrt{2}$, $DF = 5\sqrt{2}$ și $EF = 10$.
- (2p) e) Să se calculeze $\tan^4 60^\circ$.
- (2p) f) Să se calculeze, în mulțimea numerelor complexe, numărul $(2-i)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $1+3+5+7+\dots+21$.
- (3p) b) Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, cu $f(x) = -x + 3$, astfel încât funcția g este inversa funcției f . Să se calculeze $g(2)$.
- (3p) c) Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării $(2a-3)^4$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $\lg(x^2 + 10) = \lg(7x)$ $x \in (0, \infty)$.
- (3p) e) Să se rezolve ecuația $\sqrt{2-x} = x$, $x \leq 2$.

2.

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + e^x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - x$

și $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)(x)}_{de\ n\ ori\ f}$, $n \in \mathbf{N}^*$, unde „ \circ ” reprezintă operația de

componere a funcțiilor.

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (4p) b) Să se arate că $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se determine inversa funcției f .
- (2p) d) Să se arate că $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = f(4)$.
- (2p) e) Dacă $A = \begin{pmatrix} f(1) & f(0) \\ f(0) & f(1) \end{pmatrix}$, să se demonstreze că $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și să se calculeze $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_{2k}(x) = x$ și $f_{2k+1}(x) = 1 - x$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se calculeze $f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_{100}(1)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(2) - f(-2)$.
- (4p) b) Să se arate că $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) \cdot e^x dx$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2e^x}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta002

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 0)$, $B(3, 3)$, $C(0, 6)$ și $D(2, 2)$.

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul A la punctul B .
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) c) Să se demonstreze că punctele A , C și D sunt coliniare.
- (4p) d) Să se arate că triunghiul DEF este dreptunghic, unde $DE = 5\sqrt{2}$, $DF = 5\sqrt{2}$ și $EF = 10$.
- (2p) e) Să se calculeze $\tan^4 60^\circ$.
- (2p) f) Să se calculeze, în mulțimea numerelor complexe, numărul $(2-i)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $1+3+5+7+\dots+21$.
- (3p) b) Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, cu $f(x) = -x + 3$, astfel încât funcția g este inversa funcției f . Să se calculeze $g(2)$.
- (3p) c) Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării $(2a-3)^4$.
- (3p) d) Să se rezolve ecuația $\lg(x^2 + 10) = \lg(7x)$ $x \in (0, \infty)$.
- (3p) e) Să se rezolve ecuația $\sqrt{2-x} = x$, $x \leq 2$.

2.

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + e^x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - x$

și $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)(x)}_{de\ n\ ori\ f}$, $n \in \mathbf{N}^*$, unde „ \circ ” reprezintă operația de

componere a funcțiilor.

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (4p) b) Să se arate că $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se determine inversa funcției f .
- (2p) d) Să se arate că $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = f(4)$.
- (2p) e) Dacă $A = \begin{pmatrix} f(1) & f(0) \\ f(0) & f(1) \end{pmatrix}$, să se demonstreze că $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și să se calculeze $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_{2k}(x) = x$ și $f_{2k+1}(x) = 1 - x$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se calculeze $f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_{100}(1)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f(2) - f(-2)$.
- (4p) b) Să se arate că $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) \cdot e^x dx$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2e^x}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

Varianta 2

SUBIECTUL I

- a) $AB = 3$.
- b) $S_{ABC} = \frac{9}{2}$.
- c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
- d) $EF^2 = DE^2 + DF^2 \Rightarrow$ triunghiul DEF este dreptunghic.
- e) $\tg^4 60^\circ = 9$.
- f) $(2-i)^2 = 3-4i$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $S = 121$
- b) $g(x) = -x + 3$ și $g(2) = 1$.
- c) $T_3 = 216a^2$.
- d) $x \in \{2, 5\}$.
- e) $x = 1$.

2.

- a) Prin calcul direct obținem $f(0) = 1$.
- b) $f'(x) = 2 + e^x, \forall x \in \mathbf{R}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$.
- d) $\int_0^1 (2x + e^x) dx = e$.
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(-x) = -\infty$.

SUBIECTUL III

- a) Prin calcul direct: $f(0) = 1$.
- b) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbf{R}$.
- c) Din punctul b), folosind definiția funcției inverse rezultă $f^{-1} = f$.
- d) Se obține prin calcul direct.

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obținem $A^2 = I_2$, atunci $A^3 = A$, $A^4 = I_2$, $A^5 = A$, $A^6 = I_2$

și $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 = 3A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

f) Pentru $k = 1$, $f_2(x) = x$, adevărat din b) și

$f_3(x) = f_2(f(x)) = f(x) = 1 - x$, adevărat.

Presupunând adevărat că $f_{2k}(x) = x$ și $f_{2k+1}(x) = 1 - x$ pentru $k \in \mathbb{N}^*$, arătăm că $f_{2k+2}(x) = x$ și $f_{2k+3}(x) = 1 - x$.

Dar $f_{2k+2}(x) = f_{2k+1}(f(x)) = 1 - f(x) = x$. Analog $f_{2k+3}(x) = 1 - x$.

Folosind metoda inducției matematice rezultă că relațiile sunt adevărate pentru $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

g) $f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_{100}(1) = 0 + 1 + 0 + 1 + \dots + 0 + 1 = 50$.

SUBIECTUL IV

a) $f(2) - f(-2) = e^2 - e^{-2} - e^{-2} + e^2 = 2e^2 - 2e^{-2}$.

b) $f'(x)' = e^x + e^{-x}$.

c) $\int_0^1 \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x} \right) \cdot e^x dx = \left(\frac{e^{2x}}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2 + 1}{2}$.

d) $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este crescătoare pe \mathbb{R} .

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = \frac{1}{2}$.

f) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_{-1}^1 = 0$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e - e^{-1} + e^2 - e^{-2} + \dots + e^n - e^{-n})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} ((e + e^2 + e^3 + \dots + e^n) - (e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \dots + e^{-n}))$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e \cdot (e^n - 1)}{e - 1} - \frac{e^{-1} (e^{-n} - 1)}{e^{-1} - 1} \right) = \infty$.