

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta001

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0, 3)$, $B(6, 0)$, $C(3, 3)$ și $D(2, 2)$.

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul A la punctul C .
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) c) Să se demonstreze că punctele A , B și D sunt coliniare.
- (4p) d) Să se arate că triunghiul MNP este dreptunghic, unde $MN = 5$, $MP = 12$ și $NP = 13$.
- (2p) e) Să se calculeze $\sin^3 30^\circ$.
- (2p) f) Să se calculeze, în mulțimea numerelor complexe, numărul $2i^2 + 4i^4$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze numărul $2+2^3+2^5+2^7$.
- (3p) b) Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, cu $f(x) = x - 2$, astfel încât funcția g este inversa funcției f . Să se calculeze $g(1)$.
- (3p) c) Să se determine termenul al treilea al dezvoltării $(1-2a)^5$.
- (3p) d) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $2^{x^2} = 2$.
- (3p) e) Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+2} = x$, $x \geq 0$.

2.

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(2)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- (3p) e) Să se demonstreze că $x^2 \cdot f'(x) - 2x \cdot f(x) = 3$, pentru orice $x > 0$.

Proba D. Programa M2. Filiera tehnologică: profil: Servicii, toate specializările, profil Resurse naturale și protecția mediului, toate specializările

Proba F. Programa M2. Filiera teoretică:profil Uman, specializarea științe sociale;Filiera vocațională:profil Militar, specializarea științe sociale

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 2$ și $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$f_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)(x)}_{de\ n\ ori\ f}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, unde „ \circ ” reprezintă operația de compunere a

funcțiilor.

(4p) a) Să se calculeze $f(0)$.

(4p) b) Să se calculeze $f(2) + f(3) + \dots + f(11)$.

(4p) c) Să se determine inversa funcției f .

(2p) d) Să se arate că $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = f(9)$.

(2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = x + 2n$.

(2p) f) Să se arate că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_n(0) & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) g) Să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_n(1) = n^2 + 2n$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

(4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) b) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f'(x) dx$.

(4p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3}$.

(2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(e^{-x})$.

(2p) e) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .

(2p) f) Să se arate că $f(x) \geq -1$, $\forall x \geq 0$.

(2p) g) Să se calculeze $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2} dx$.

Varianta 1

SUBIECTUL I

- a) $AC = 3$.
- b) $S_{ABC} = \frac{9}{2}$.
- c) Se verifică: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci punctele A, B, D sunt coliniare.
- d) Deoarece $13^2 = 12^2 + 5^2$ triunghiul MNP este dreptunghic.
- e) $\sin^3 30^\circ = \frac{1}{8}$.
- f) $2 \cdot i^2 + 4 \cdot i^4 = 2$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 170$.
- b) $g(x) = x + 2$ și $g(1) = 3$.
- c) $T_3 = 40a^2$.
- d) $x \in \{-1, 1\}$.
- e) $x = 2$.

2.

- a) Prin calcul direct obținem $f(2) = \frac{7}{2}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{17}{4}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
- d) $\int_1^e \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{e^3 - 4}{3}$.
- e) $x^2 \cdot f'(x) - 2x \cdot f(x) = 3$.

SUBIECTUL III

- a) $f(0) = 2$.
- b) $f(2) + f(3) + \dots + f(11) = 85$.
- c) $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = x - 2$.
- d) Se obține prin calcul direct.

e) Notăm $P(n)$: $f_n(x) = x + 2n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$.

Pentru $n = 1$ obținem $f_1(x) = x + 2$, adevărat.

Presupunând că $P(k)$: $f_k(x) = x + 2k$, este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$: $f_{k+1}(x) = x + 2(k+1)$, este adevărată.

Dar $f_{k+1}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{de\ k\ ori\ f}(x) = f(x) + 2k = x + 2(k+1)$. Deci $P(k+1)$ este

adevărată. Ambele etape fiind verificate, $\Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, f_n(x) = x + 2n$.

f) Notăm $P(n)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_n(0) & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

$P(1)$ adevărată și presupunând că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_k(0) & 1 \end{pmatrix}$ este adevărată pentru

$k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_{k+1}(0) & 1 \end{pmatrix}$.

Dar $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_n(0) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_{n+1}(0) & 1 \end{pmatrix}$. q.e.d.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_n(0) & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_n(1) = \sum_{k=1}^n f_k(1) = \sum_{k=1}^n (1 + 2k) = n + n(n+1) = n^2 + 2n$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

b) $\int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \int_0^1 x(3x^2 + 2x + 1) dx = \frac{23}{12}$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^3} = 1$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x} - 1) = 0 + 0 + 0 - 1 = -1$.

e) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f este crescătoare pe \mathbf{R} .

f) Din punctul e) $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow \forall x \geq 0$ avem $f(x) \geq f(0) = -1$.

g) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2} dx = \left(2x + \frac{2}{x} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0$.