

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta100

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(3, -2)$ la punctul $B(-2, 3)$.
- (4p) b) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe $(1+3i)(4-2i)=a+bi$.
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{15}$.
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex $-4-9i$.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3, -2)$ și $B(-2, 3)$ să aparțină dreptei de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) f) Dacă în triunghiul ABC , $AB = 3$, $AC = 8$ și $m(\hat{B}AC) = 90^\circ$, să se calculeze BC .

SUBIECTUL II (30p)

1.
 - (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 2 & 30 \end{vmatrix}$.
 - (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n \geq 28$.
 - (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $64^x - 32 = 0$.
 - (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_8 x = 3$.
 - (3p) e) Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^4 + 1$ la polinomul $g = X^2 + X + 1$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x^4}$.
 - (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
 - (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
 - (3p) c) Să se determine ecuația asymptotei verticale la graficul funcției f .
 - (3p) d) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.
 - (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$ și $4 \in A$.
- (4p) b) Să se verifice că $5 \notin A$ și $7 \notin A$.
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$,
 $\forall a \in \mathbf{R} - \{1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (2p) d) Să se arate că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} < 2$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- (2p) e) Să se arate că $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^s} < \frac{3}{2}$, $\forall s \in \mathbb{N}$.
- (2p) f) Să se calculeze numărul de elemente din mulțimea $A \cap \{1, 2, 3, \dots, 20\}$.
- (2p) g) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi numerele naturale distincte $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$,
avem $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 3$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră mulțimea $A = \mathbf{R} - \{-3, -2, -1\}$ și funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$, $g(x) = f'(x)$, $h(x) = g'(x)$ și $u : A \rightarrow \mathbf{R}$,

$$u(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $u'(x)$, $x \in A$.
- (4p) b) Să se arate că $g(x) = f(x) \cdot u(x)$, $\forall x \in A$.
- (4p) c) Să se arate că $u'(x) < 0$, $\forall x \in A$.
- (2p) d) Să se arate că $u'(x) = \frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)}$, $\forall x \in A$.
- (2p) e) Să se determine ecuația asymptotei spre $+\infty$ la graficul funcției u .
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 u(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că $g^2(x) > h(x) \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Varianta 100

SUBIECTUL I

a) $AB = 5\sqrt{2}$. b) a=10, b=10. c) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$. d) $\overline{-4-9i} = -4+9i$.

e) $a = 1, b = -1$. f) $BC = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$.

SUBIECTUL II

1. a) -10. b) $p = \frac{2}{5}$. c) $2^{6x} = 2^5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$. d) $x = 8^3 = 512$. e) Efectuând împărțirea obținem câtul $X^2 - X$ și restul $X + 1$.

2.

a) $f'(x) = \frac{-4}{x^5}, x \in \mathbf{R}^*$. b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -4$. c) $x = 0$ este unica asimptotă verticală. d) $\frac{31}{24}$. e) 1.

SUBIECTUL III

a) $1 = 2^0 \cdot 3^0 \in A$; $2 = 2^1 \cdot 3^0 \in A$; $3 = 2^0 \cdot 3^1 \in A$; $4 = 2^2 \cdot 3^0 \in A$.

b) Egalitatea $5 = 2^i \cdot 3^j, i, j \in \mathbf{N}$ este imposibilă, deci $5 \notin A$. Analog $7 \notin A$.

c) Fie $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Dacă $n = 0$, atunci $1 = \frac{1-a}{1-a}$, adevărat. Pentru $n=1$, $1+a = \frac{1-a^2}{1-a}$ este adevărată. Presupunem că $1+a+a^2+\dots+a^k = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}, k \in \mathbf{N}^*$. Atunci $1+a+a^2+\dots+a^k+a^{k+1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a} + a^{k+1} = \frac{1-a^{k+2}}{1-a}$, deci afirmația este adevărată și pentru $n = k + 1$.

d) Utilizând c) avem $\sum_{i=0}^k \frac{1}{2^i} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^k} < 2, \forall k \in \mathbf{N}$.

e) Utilizând c) avem $\sum_{i=0}^s \frac{1}{3^i} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{s+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^s} < \frac{3}{2}, \forall s \in \mathbf{N}$.

f) Multimea cerută conține 10 elemente.

g) Putem presupune că $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Suma $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ ia valoarea

maximă dacă numerele $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sunt alese cât mai mici cu putință, adică $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 6, a_6 = 8, a_7 = 9, a_8 = 12, \text{etc.}$ Pentru această alegere $\exists p, s \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^p}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^s}\right) < 2 \cdot \frac{3}{2} = 3, \text{ deci } S_n < 3.$$

SUBIECTUL IV

a) $u'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+3)^2}, x \in A.$

b)

$$\begin{aligned} f(x) \cdot u(x) &= (x+1)(x+2)(x+3) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) = \\ &= (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2). \end{aligned}$$

$f'(x) = (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) = g(x)$, deci are loc egalitatea cerută.

c) Din a) rezultă că $u'(x) < 0, \forall x \in A$. d) Din b), pentru $\forall x \in A$, avem:

$$u(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \Rightarrow u'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{h(x)f(x) - g^2(x)}{f^2(x)}, \forall x \in A.$$

e) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. f) $\ln 4$.

g) Pentru orice $x \in A$, din c) avem $u'(x) < 0$ și utilizând d) obținem

$$f(x) \cdot h(x) - g^2(x) < 0, \text{ adică } g^2(x) > f(x) \cdot h(x), \forall x \in \mathbf{R}.$$