

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta099

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $-4 + 3i$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele $A(3, -2)$ și $C(4, 3)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos \pi + \cos 2\pi$.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3, -2)$ și $C(4, 3)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3, -2)$, $B(2, 2)$ și $C(4, 3)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe
- $$\frac{-5 + 6i}{-6 + 5i} = a + bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $\hat{2}^{2007}$ în \mathbf{Z}_8 .
- (3p) b) Să se calculeze $C_7^3 - C_7^4 + C_7^7$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x^2 = 1$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x - 64 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n < 31$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^9 + 2x^7 - 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n}{5n^2 - 2n}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se verifice că $A + I_2 = B$.
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei B .
- (4p) c) Să se verifice că $A^2 = A$.
- (2p) d) Să se calculeze A^{2007} .
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că $aA + bB + cI_2 \neq C$, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se arate că matricea $X = A^n + B^n$ este inversabilă $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^{x^2}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că, dacă $x \in [1, 2]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \geq 0$.
- (4p) c) Utilizând inegalitatea de la punctul b), să se arate că, dacă $x \in [1, 2]$, atunci $\frac{1}{x} + \frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}$.
- (2p) d) Să se verifice că $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \leq \frac{3}{2}$, $\forall x \in [0, 1]$.
- (2p) e) Să se arate că, dacă $u, v \in \mathbf{R}$, atunci $(u+v)^2 \geq 4uv$.
- (2p) f) Integrând inegalitatea de la punctul d), să se arate că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{3}{2}$.
- (2p) g) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că $\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \right) \cdot \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \leq \frac{9}{8}$.

Varianta 099

SUBIECTUL I

a) 5.b) $AC = \sqrt{26}$. c) 0. d) $a = -\frac{1}{5}, b = -\frac{17}{5}$. e) $S = \frac{9}{2}$. f) $a = \frac{60}{61}$ și $b = -\frac{11}{61}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{2}^{2007} = \hat{2}^3 \cdot \hat{2}^{2004} = \hat{0}$. b) $E = 1$. c) $x = \sqrt{5}$ căci $x > 0$. d) $4^{2x} = 4^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. e) $p = \frac{3}{5}$.

2.

a) $f'(x) = ax^8 + 14x^6, x \in \mathbf{R}$. b) $\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{x^{10}}{10} + \frac{x^8}{4} - x \right) \Big|_0^1 = -\frac{13}{20}$. c) $f'(0) = 0$.

d) Din a) avem că $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} . e) $\frac{2}{5}$.

SUBIECTUL III

a) $A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$. b) $\det(B) = 2$, $\text{rang}(B) = 2$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$.

d) Din c) se deduce că $A^n = A, \forall n \in \mathbf{N}^*$, deci $A^{2007} = A$.

e) Pentru $n = 1, B = I_2 + A$ este adevărată. Presupunem că $B^k = I_2 + (2^k - 1)A, k \in \mathbf{N}^*$.

Atunci

$$B^{k+1} = B^k \cdot B = (I_2 + (2^k - 1)A)(I_2 + A) = I_2 + A + (2^k - 1)A + (2^k - 1)A^2 = I_2 + (2^{k+1} - 1)A$$

deci afirmația este adevărată și pentru $n = k + 1$.

Rezultă că $B^n = I_2 + (2^n - 1)A, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) Pentru orice $a, b, c \in \mathbf{R}$, elementul de pe poziția $(1, 2)$ din matricea $aA + bB + cI_2$ este 0, iar cel de pe aceeași poziție din matricea C este 2. Atunci, $aA + bB + cI_2 \neq C$.

g) Din c) și e) obținem $X = A + I_2 + (2^n - 1)A = I_2 + 2^n A = \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 0 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix}$. Atunci

$\det(X) = 2^n + 1 \neq 0$, de unde rezultă că matricea X este inversabilă.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2, x \in \mathbf{R}$.

b) Dacă $x \in [1, 2]$, atunci $x - 1 \geq 0$ și $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$, de unde obținem inegalitatea dorită.

c) Efectuând înmulțirea la b), obținem $\frac{1}{x} + \frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}, x \in [1, 2]$

d) Dacă $x \in [0, 1]$, atunci $x^2 \in [0, 1]$, deci $f(x) \in [1, 2]$ și folosind c) obținem inegalitatea dorită.

e) Pentru $\forall u, v \in \mathbf{R}, (u + v)^2 \geq 4uv \Leftrightarrow (u - v)^2 \geq 0$, relație adevărată.

f) Din d) rezultă că $\int_0^1 \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \right) dx \leq \int_0^1 \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2}$, și folosind proprietatea de liniaritate a integralei definite, obținem inegalitatea cerută.

g) Fie $u = \int_0^1 f(x) dx \in [1, 2]$ și $v = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$. Atunci avem

$v \cdot \left(\frac{1}{2} u \right) \stackrel{e)}{\leq} \frac{1}{4} \left(v + \frac{1}{2} u \right)^2 \stackrel{f)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{16}$, de unde prin înmulțire cu 2, obținem inegalitatea cerută.