

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta098

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate Oxy se consideră punctele $A(1,-1)$, $B(4,2)$, $C(0,6)$.

- (4p) a) Să se determine conjugatul numărului complex $(2 - 3i)^2$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului $[AC]$.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se calculeze $\sin(\hat{ABC})$.
- (2p) e) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât $x + my + n = 0$ să reprezinte ecuația dreptei AC .
- (2p) f) Să se calculeze distanța de la punctul B la dreapta AC .

SUBIECTUL II (30p)

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compozиie

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6, \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

- (3p) a) Să se determine $e \in \mathbf{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3 * x = 11$.
- (3p) c) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 4 & C_5^2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.
- (3p) d) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2007x - 2006$. Să se calculeze $(f \circ f)(1)$.
- (3p) e) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 \frac{x+2}{27} = -3$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (3p) d) Să se determine ecuația asymptotei spre ∞ la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{2007n}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră numerele complexe $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $w = 1 + \varepsilon$ și mulțimile

$$G = \{a + \varepsilon b \mid a, b \in \mathbf{Z}\} \text{ și } H = \{z \in G \mid \exists z' \in G, z \cdot z' = 1\}.$$

- (4p) a) Să se arate că $1 \in G, w \in G$.
- (4p) b) Să se arate că $\varepsilon^2 = -\varepsilon - 1$ și $\varepsilon^3 = 1$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $z_1, z_2 \in G$ atunci $z_1 + z_2 \in G$ și $z_1 z_2 \in G$.
- (2p) d) Să se arate că $w \in H$.
- (2p) e) Să se calculeze w^{2007} .
- (2p) f) Să se arate că, dacă $z \in H$, atunci $|z| = 1$.
- (2p) g) Să se determine mulțimea H .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, \infty)$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe $[0, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) \leq 0$, $\forall x \geq 0$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- (2p) e) Să se determine funcția $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, unde $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in [0, \infty)$.
- (2p) f) Să se arate că funcția F este descrescătoare pe $[0, \infty)$.
- (2p) g) Să se arate că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 098

SUBIECTUL I

a) $-5 + 12i$. b) $AC = 5\sqrt{2}$. c) $S = 12$. d) $\sin(A\hat{B}C) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. e) $m = \frac{1}{7}, n = -\frac{6}{7}$.

f) $d(B, AC) = \frac{|7 \cdot 4 + 2 - 6|}{\sqrt{7^2 + 1}} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x \circ e = x, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow (x - 2)(e - 3) = 0, \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow e = 3$. Se verifică prin calcul că

b) $3 \circ x = 11 \Leftrightarrow x = 11$. c) -22 . d) 1. e) $x = -1$

2.

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbf{R}$. b) $f'(-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. c) $\sqrt{2} - 1$. d) $y = x$. e) $\frac{1}{2007}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a = 1$ și $b = 0$ avem $1 = 1 + \varepsilon \cdot 0 \in G$. Pentru $a = b = 1$ rezultă $w = 1 + 1 \cdot \varepsilon \in G$.

b) $\varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\varepsilon - 1, \varepsilon^3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = 1$.

c) Fie $z_1 = a + \varepsilon \cdot b \in G, z_2 = c + \varepsilon \cdot d \in G$. Atunci $z_1 + z_2 = a + c + \varepsilon \cdot (b + d) \in G$, căci $a + c, b + d \in \mathbf{Z}$ și $z_1 \cdot z_2 = ac + \varepsilon(ad + bc) + \varepsilon^2 bd = ac - bd + \varepsilon(ad + bc - bd) \in G$, căci $ac - bd, ad + bc - bd \in \mathbf{Z}$.

d) $w = 1 + \varepsilon, w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ și luând $w' = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -\varepsilon \in G, w \cdot w' = 1$, deci $w \in H$.

e) Deoarece $w^3 = -1$, rezultă $w^{2007} = (w^3)^{669} = (-1)^{669} = -1$.

f) Fie $z = a + \varepsilon b \in H, z' = c + \varepsilon d \in H$ cu $z \cdot z' = 1$. Atunci avem

$$ac - bd + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(ad + bc - bd) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc - bd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ca - db = 1 \\ cb + d(a - b) = 0 \end{cases}.$$

Acesta îl privim ca și un sistem liniar cu necunoscutele c și d . Matricea sistemului

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a - b \end{pmatrix} \text{ are determinantul } \det(A) = a^2 - ab + b^2 \neq 0, \text{ căci } z \neq 0. \text{ Atunci}$$

$$c = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a - b \end{vmatrix} = \frac{a - b}{\det(A)}, d = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = \frac{-b}{\det(A)}. \text{ Dacă } b \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\},$$

atunci $d = \frac{-b}{a^2 - ab + b^2} \in (-1, 1)$ și $d \in \mathbf{Z}$ implică $b = 0$, deci $c = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a} \in \mathbf{Z}$ și

$a = \pm 1$. Atunci $z \in \{-1, 1\}$. Dacă $b = 1$, atunci

$$d = \frac{-1}{a^2 - a + 1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow a^2 - a + 1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow a \in \{0, 1\}, \text{ deci } z \in \{\varepsilon, 1 + \varepsilon\}. \text{ Dacă } b = -1,$$

$$\text{atunci } d = \frac{1}{a^2 + a + 1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow a^2 + a + 1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow a \in \{0, -1\}, \text{ deci } z \in \{-\varepsilon, -1 - \varepsilon\}.$$

Utilizând și b) deducem că $H = \{-1, 1, \varepsilon, -\varepsilon^2, -\varepsilon, \varepsilon^2\}$. Cum

$$|-1| = |1| = |\varepsilon| = |- \varepsilon| = |\varepsilon^2| = |-\varepsilon^2| = 1, \text{ avem că } \forall z \in H \Rightarrow |z| = 1.$$

g) Din demonstrația de la f) avem că $H = \{-1, 1, \varepsilon, -\varepsilon, \varepsilon^2, -\varepsilon^2\}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}, x \in [0, \infty)$.

b) Din a) rezultă că $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ și $f'(0) = 0$, deci funcția f este descrescătoare pe $[0, \infty)$. c) Utilizând b) avem $f(x) \leq f(0) = 0, \forall x \in [0, \infty)$.

d) 0. e)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (\ln(1+t) - t) dt = t \cdot \ln(1+t) \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t} dt - \frac{t^2}{2} \Big|_0^x \\ &= x \ln(1+x) - (t - \ln(t+1)) \Big|_0^x - \frac{x^2}{2} = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

f) Cum F este o primitivă a funcției f , avem $F'(x) = f(x) \leq 0, \forall x \in [0, \infty)$, deci F este descrescătoare pe $[0, \infty)$.

g) Din c) avem că $\ln(1+x) \leq x, \forall x \geq 0$, deci $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1, n \in \mathbf{N}^*$, de unde

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e < 3, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$