

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta097

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine lungimea segmentului $[AB]$ cu extremitățile în punctele $A(1,0,1)$ și $B(0,1,0)$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $A(1,1,1)$ la planul de ecuație $x + y + z - 6 = 0$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}$.
- (4p) d) Să se calculeze aria totală a cubului cu latura 1.
- (2p) e) Să se determine soluțiile complexe ale ecuației $x^3 + 8 = 0$.
- (2p) f) Să se calculeze aria cercului cu raza $R = 3$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze inversul lui $\hat{3}$ în inelul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$.
- (3p) b) Să se determine suma primilor 2007 termeni ai progresiei geometrice $1, -1, 1, -1, \dots$
- (3p) c) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $\log_3(x^2 + 2) = 3$.
- (3p) d) Să se determine multimea $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 1 > 0\}$.
- (3p) e) Să se determine probabilitatea ca un element al mulțimii $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$ să fie divizibil cu 9.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}^*$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nf(n)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea M formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane cu proprietatea că elementele fiecărei matrice din mulțimea M formează mulțimea $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

- (4p) a) Să se verifice că, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, atunci $A \in M$.
- (4p) b) Să se determine numărul elementelor mulțimii M .
- (4p) c) Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
- (2p) d) Să se găsească o matrice $C \in M$, astfel încât $\det(C) \neq 0$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $B \in M$ este o matrice inversabilă, atunci $B^{-1} \notin M$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $D \in M$, atunci $\text{rang}(D) \in \{2, 3\}$.
- (2p) g) Să se arate că mulțimea M conține cel puțin 9 matrice cu determinantul egal cu 0.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(\ln \left(x + \frac{2}{3} \right) - \ln x \right)$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se arate că $f''(x) = \frac{4}{3x^2(3x+2)^2}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_1^e f'(x) dx$.
- (2p) f) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (2p) g) Să se arate că $\left(1 + \frac{2}{3n} \right)^{\frac{n+1}{3}} > \left(1 + \frac{2}{3(n+1)} \right)^{\frac{n+4}{3}}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 097

SUBIECTUL I

- a) $AB = \sqrt{3}$. b) $\sqrt{3}$. c) 0. d) 1. e) $x_1 = -2, x_2 = 1 + \sqrt{3} \cdot i, x_3 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $\hat{3}^{-1} = \hat{2}$, căci $\hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{1}$ în \mathbf{Z}_5 . b) Suma cerută este 1. c) $n = 2$. d) $x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$. e) $p = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

2.

- a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, x \in \mathbf{R}^*$. b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -1$. c) $y = 0$. d) 1.f) 1.

SUBIECTUL III

- a) $A \in M$ deoarece A are 3 linii, 3 coloane și reuniunea elementelor matricei este multimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
 b) Cele 9 elemente pot fi așezate pe cele 9 poziții în $9!$ moduri. Așadar există $9!$ matrice.

- c) 0. d) Luăm $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in M$ și avem $\det(C) = -140 \neq 0$.

- e) Presupunem că există $B \in M$ inversibilă astfel încât $B^{-1} \in M$. Fie $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ și $B^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}$.

Deoarece $B \cdot B^{-1} = I_3$ rezultă că $b_1a_2 + b_2a_5 + b_3a_8 = 0$, adică o sumă de numere naturale nenule este egală cu 0, contradicție. Deci presupunerea este falsă.

- f) Fie $D \in M$. Atunci $\text{rang}(D) \leq 3$. Fie d un minor de ordinal întâi care îl conține pe 7 ($d = |7| = 7$). Bordând pe

d , obținem un determinant d' de ordinul 2 de forma: $\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}$ sau $\begin{vmatrix} a & 7 \\ b & c \end{vmatrix}$ sau $\begin{vmatrix} a & b \\ 7 & c \end{vmatrix}$ sau $\begin{vmatrix} a & b \\ c & 7 \end{vmatrix}$ cu

$a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$. Atunci $d_i \neq 0$ (altfel un multiplu de 7 ar fi egal cu un număr nedivizibil cu 7), deci $\text{rang}(D) \geq 2$. Cum elementele din M sunt matrice de ordin 3, rezultă $\text{rang}(D) \in \{2, 3\}$.

g) există cel puțin 12 matrice cu proprietatea cerută.

SUBIECTUL IV

- a) $f'(x) = \ln(x + \frac{2}{3}) - \ln x + \left(x + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{x + \frac{2}{3}} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x + \frac{2}{3}\right) - \ln x - \frac{2(3x+1)}{3x(3x+2)}, x \in (0, \infty)$.

- b) $f''(x) = \frac{4}{3x^2(3x+2)^2}, x \in (0, \infty)$. c) Din b) rezultă că $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, deci funcția f' este

strict crescătoare pe $(0, \infty)$. d) 0. e) $\int_1^e f'(x) dx = f(x)|_1^e = f(e) - f(1) = \left(e + \frac{1}{3}\right) \left[\ln(e + \frac{1}{3}) - 1\right] - \frac{4}{3} \cdot \ln \frac{5}{3}$.

- f) Din b) avem că $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, deci f' este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și folosind d) obținem $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, de unde rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

g) Prin logaritmare, inegalitatea de demonstrat se transformă echivalent și deoarece

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{3} \right) \left[\ln \left(x \left(1 + \frac{2}{3x} \right) \right) - \ln x \right] = \left(x + \frac{1}{3} \right) \ln \left(1 + \frac{2}{3x} \right) \text{ și } f \text{ este descrescătoare pe } (0, \infty), \text{ avem că}$$
$$f(n) > f(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ adică relația (1) este adevărată și atunci inegalitatea cerută este demonstrată.}$$