

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....096***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex  $2 - 5i$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele  $A(1, 5)$  și  $C(5, 1)$ .
- (4p) c) Să se determine raza cercului de ecuație  $x^2 + y^2 - 25 = 0$ .
- (4p) d) Să se determine panta dreptei  $AC$ , unde  $A(1, 5)$  și  $C(5, 1)$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin x$  dacă  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\cos x = \frac{1}{2}$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe
- $$\frac{11+i}{1-11i} = a+bi.$$

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ .
- (3p) b) Să se calculeze rangul matricei  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația  $\log_3 x = -2$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $9^x - 3 = 0$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , să verifice relația  $n^3 < n + 6$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^x + 2x + 1$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{5n^2 - 2}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră polinoamele  $f = X^2 + X + 1$  și  $g = X^2 + X$ .

- (4p) a) Să se determine rădăcinile polinomului  $f$ .
- (4p) b) Să se rezolve în multimea numerelor reale inecuația  $x^2 + x < 0$ .
- (4p) c) Să se verifice identitatea  $\frac{1}{g(n)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- (2p) d) Să se calculeze suma  $S = \frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(2)} + \dots + \frac{1}{g(2007)}$ .
- (2p) e) Să se verifice că  $f = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ .
- (2p) f) Să se arate că  $g \neq s^2 + t^2$ , pentru orice două polinoame  $s, t \in \mathbb{R}[X]$ .
- (2p) g) Să se găsească două polinoame  $u, v \in \mathbb{C}[X]$ , astfel încât  $g = u^2 + v^2$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2007} + 1$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că, dacă  $x \in [1, 2]$ , atunci  $(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \geq 0$ .
- (4p) c) Utilizând eventual inegalitatea de la punctul b), să se arate că, dacă  $x \in [1, 2]$ , atunci  $\frac{1}{x} + \frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}$ .
- (2p) d) Să se verifice că  $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \leq \frac{3}{2}$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .
- (2p) e) Să se arate că, dacă  $u, v \in \mathbb{R}$ , atunci  $(u+v)^2 \geq 4uv$ .
- (2p) f) Integrând inegalitatea de la punctul d), să se arate că
 
$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{3}{2}$$
- (2p) g) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că
 
$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right) \cdot \left( \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \right) \leq \frac{9}{8}$$

## Varianta 096

### SUBIECTUL I

- a)  $\bar{z} = 2 + 5i$ . b)  $AC = 4\sqrt{2}$ . c) Centrul este  $C(0,0)$  și raza  $r=5$ . d)  $m_{AC} = \frac{1-5}{5-1} = -1$ .  
e)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . f)  $a = 0$  și  $b=1$ .

### SUBIECTUL II

1.

- a) 10. b) rangul matricei date este 1. c)  $x = \frac{1}{9}$ . d)  $2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ . e)  $p = \frac{1}{5}$ .  
2.  
a)  $f'(x) = e^x + 2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . b)  $e+1$ . c) 3. d) Din a) rezultă că  $f'(x) > 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ . e)  $\frac{1}{5}$ .

### SUBIECTUL III

- a)  $\Delta = -3 < 0$ ,  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ . b)  $x^2 + x < 0 \Leftrightarrow x \in (-1,0)$ . c) Avem:  

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{g(n)}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$
.  
d) Utilizând c) avem  $S = \frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(2)} + \dots + \frac{1}{g(2007)} = \frac{2007}{2008}$ .  
e) Avem că  $\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = X^2 + X + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = f$ .  
f) Presupunem că există două polinoame  $s, t \in \mathbf{R}[x]$  astfel încât  $g = s^2 + t^2$ .  
Atunci  $g(x) = s^2(x) + t^2(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , de unde  $g(x) = x^2 + x \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , contradicție deoarece  $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$ . Așadar, presupunerea făcută este falsă.

- g) Avem că  $g = X^2 + X = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\right)^2$ . Putem lua  $u = X + \frac{1}{2}$  și  $v = \frac{1}{2}i \in \mathbf{C}[X]$ .

### SUBIECTUL IV

- a)  $f'(x) = 2007 \cdot x^{2006}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . b)  $x-1 \geq 0$  și  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ , de unde rezultă  $(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) \geq 0$ .  
c) Efectuând înmulțirile de la b), obținem  $1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}$ .  
d) Pentru  $x \in [0,1]$  avem  $x^{2007} \in [0,1]$  deci  $f(x) \in [1,2]$  și utilizând c) obținem  $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \leq \frac{3}{2}$ .

e)  $(u + v)^2 \geq 4uv \Leftrightarrow (u - v)^2 \geq 0$ , relație adevărată pentru  $\forall u, v \in \mathbf{R}$ .

f) Din d) rezultă că  $\int_0^1 \left( \frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{2} \right) dx \leq \int_0^1 \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2}$  și utilizând proprietatea de liniaritate a integralei definite, obținem inegalitatea cerută.

g) Fie  $u = \int_0^1 f(x)dx \in [1, 2]$  și  $v = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$ . Atunci avem

$$v \cdot \left( \frac{1}{2}u \right) \stackrel{e)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \left( v + \frac{1}{2}u \right)^2 \stackrel{f)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{16}, \text{ de unde obținem că } v \cdot u \leq \frac{9}{8}.$$